广西科学 Guangxi Sciences 1 (4): 19～22 1994

n 阶非线性泛函微分方程正解存在的几个充要条件

On the Positive Solutions of the nth Order Nonlinear Functional Differential Equation

席鸿建
Xi Hongjian

(广西大学数学与信息科学系 南宁市西乡塘路10号 530004)
(Dept. of Math. & Inf's Sci. Guangxi University, 10 Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 利用 Schauder 不动点定理讨论 n 阶非线性泛函微分方程 $x^{(n)}(t)+p(t)f(x(g(t))=r(t)$ 正解全体的构成与正解的存在性.

关键词 函微分方程 正解 不动点定理

Abstract The higher order nonlinear functional differential equation, $x^{(n)}(t)+p(t)f(x(g(t))=r(t)$ is discussed by using Schauder's fixed point theorem, some necessary and sufficient coditions for existence of positive solution of the equation are established.

Key words functional differential equation, positive solution, fixed point theorem

本文讨论带强迫项的高阶非线性泛函微分方程

$$x^{(n)}(t)+p(t)f(x(g(t))=r(t) \tag{1}$$

正解的存在性. 记 P 为(1)正解的全体,对整数 $k(0\leqslant k\leqslant n-1)$,记

$A_K=\{x(t)\in P:\lim\limits_{t\to\infty}x^{(k)}(t)=\text{const}>0\}$;

$B_k=\{x(t)\in P:\lim\limits_{t\to\infty}x^{(k)}(t)=0$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}x^{(k-1)}(t)=\infty\}$.

其中 $k=0$ 时,用 $\lim\limits_{t\to\infty}x^{(k)}(t)=0$ 代替 $\lim\limits_{t\to\infty}x^{(k-1)}(t)=\infty$. 记 $A=\bigcup_{k=0}^{n-1}A_k, B=\bigcup_{k=0}^{n-1}B_k$.

关于FDE的 P 构成及 $A_k\neq\Phi, B_k\neq\Phi$ 的特征等问题,一直为许多研究者所重视[1~5]. 一般而言,对这些问题的讨论基本上局限于常时滞与无强迫项的方程. 本文对(1)讨论了 P 的构成问题并揭示了 $A_k\neq\Phi$ 的特征,得到了方程(1)存在正解的充要条件. 本文的结论包含了有界滞量与无强迫项等特殊情形.

在下文中,若无特别声明,如下条件总假设成立:

H_1 $P(t),g(t)\in C([t_0,\infty),R_+)$, $0\leqslant g(t)\leqslant t$,且 $\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=\infty$. 这里 $R_+=[0,\infty)$, $n\geqslant 2$.

H_2 $f(x)\in C(R,R)$. 存在 $0<\alpha<1$ 使 $\liminf\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^\alpha}=L_1>0$,

$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L_2|x_1-x_2|^\alpha \quad (L_2>0)$,

且当 $x\neq 0$ 时, $xf(x)>0$.

1994-05-16收稿。

H_3 存在零点集无界的 n 次可微函数 $R(t)$,使 $R^{(n)}(t)=r(t)$,且 $\lim\limits_{t\to\infty}R^{(k)}(t)=0$, $(k=0,1,\cdots,n-1)$.

我们需要如下两个引理,它们的证明可在文献[1,2]中找到.

引理1 设 $x(t)$ 是方程

$$x^{(n)}(t)+p(t)x^\alpha(g(t))=0$$

的正解,则存在整数 $k(0\leqslant k\leqslant n-1)$ 使 $\lim\limits_{t\to\infty}x^{(k)}(t)=\text{const}>0$,或 $\lim\limits_{t\to\infty}x^{k}(t)=0$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}x^{(k-1)}(t)=\infty$.

引理2 对每个整数 $k(0\leqslant k\leqslant n-1)$,方程

$$x^{(n)}(t)+p(t)x^\alpha(t)=0 \quad ,\ t\geqslant t_0$$

存在满足 $\lim\limits_{t\to\infty}x^{(k)}(t)=\text{const}>0$ 的正解的充要条件是 $\displaystyle\int^\infty t^{n-k-1+k\alpha}p(t)\mathrm{d}t<\infty$.

如下引理3表明了方程(1)的正解全体的构成.

引理3 $P=A\cup B$

证 依定义 $A\cup B\subset P$.

设 $x_0\in P$,令 $x_0(t)=y_0(t)+R(t)$,代入(1)得

$$y_0^{(n)}(t)+p(t)f(y_0(g(t))+R(g(t))=0 \quad (2)$$

由(2)知,存在 $t_1\geqslant t_0$,使 $t\geqslant t_1$ 时, $y^{(n)}<0$. 因此 $y_0^{(i)}(t)(i=0,1,\cdots,n-1)$ 均为最终单调函数. 因为 $t\geqslant t_1$ 时 $x_0(t)>0$,因此有 $t_2\geqslant t_1$,使 $t\geqslant t_2$ 时 $y_0(t)>0$. 否则,由于 $y_0(t)$ 的单调性,必有 $y_0(t)<0$

对充分大的 t 成立,亦即对充分大的 $t, x_0(t) < R(t)$. 由于 $R(t)$ 有任意大的零点,这与 $x_0(t) > 0$ 矛盾. 由此,$y_0(t)$ 是方程

$$y^{(n)}(t) + \frac{p(t)f(y_0(g(t)) + R(g(t)))}{y_0^{\alpha}(g(t))} y^{\alpha}(g(t)) = 0 \tag{3}$$

的正解. 由引理 1,存在 $k(0 \leqslant k \leqslant n-1)$,

使得 $\lim\limits_{t\to\infty} y_0{}^{(k)}(t) = \text{const} > 0$ 或 $\lim\limits_{t\to\infty} y^{(k)}(t) = 0$

且 $\lim\limits_{t\to\infty} x^{(k-1)}(t) = \infty$. 由条件 H_3,即可知 $x_0 \in A \cup B$. 从而 $P \subset A \cup B$.

证毕

定理 1 设整数 k 满足 $0 \leqslant k \leqslant n-1$, 则 $A_k \neq \Phi$ 的充分必要条件是

$$\int^{\infty} t^{n-k-1} g^{k\alpha}(t) p(t) \mathrm{d}t < \infty \tag{4}$$

证明 必要性

设 $x \in A_k$,令 $y(t) = x(t) - R(t)$ 则 $y(t)$ 是方程

$$y^{(n)}(t) + \frac{p(t)f(x(g(t))}{y^{\alpha}(t)} y^{\alpha}(t) = 0$$

的正解,且

$$\lim_{t\to\infty} y^{(k)}(t) = \text{const} > 0 \tag{5}$$

由引理 2

$$\int^{\infty} \frac{t^{n-k-1+k\alpha} p(t) f(y(g(t)) + R(g(t))}{y^{\alpha}(t)} \mathrm{d}t < \infty.$$

由于(5)式成立,因而存在正数 A, B 与 $t_1 \geqslant t_0$,使

$$Bt^k \leqslant y(t) \leqslant At^k \qquad (\text{当 } t \geqslant t_1 \text{ 时}) \tag{6}$$

由条件 H_1 与 H_2,存在 $t_2 \geqslant t_1$,使 $t \geqslant t_2$ 时

$$\begin{aligned} & f(y(g(t)) + R(g(t)) \\ & \geqslant \frac{L_1}{2}(y(g(t)) + R(g(t)))^{\alpha} \\ & \geqslant \frac{L_1}{4} y^{\alpha}(g(t)) \geqslant \frac{L_1 B^{\alpha}}{4} g^{\alpha k}(t) \end{aligned} \tag{7}$$

因此,当 $t \geqslant t_2$ 时

$$\frac{f(y(g(t)) + R(g(t)))}{y^{\alpha}(t)} \geqslant \frac{L_1}{4} \cdot \left(\frac{B}{A}\right)^{\alpha} g^{\alpha k}(t) t^{\alpha - k}$$

故(4) 成立.

充分性

设(4) 成立,记

$$t_* = \inf_{t \geqslant t_0}\{g(t)\}, M_0 = \sup_{t \in R}|R(t)| + 1,$$

因 $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$,故

$$M_1 = \int_{t_0}^{\infty} u^{n-k-1} p(u)(g^k(u) + 1)^{\alpha} \mathrm{d}u < \infty \tag{8}$$

由于 $0 < \alpha < 1$,可选充分大的正数 a,使

$$\frac{M_1 L_2}{k!(n-k-1)!}((2a)^{\alpha} + M_0^{\alpha}) \leqslant a \text{ 且 } M_0 \leqslant a.$$

记 C 为 $[t_0, \infty)$ 上有界连续函数全体构成的 Banach 空间,记 $K = \{y \in C : a \leqslant y(t) \leqslant 2a\}, t \geqslant t_0\}$,则 K 为有界闭凸集.

当 $k \geqslant 1$ 时,令

$$Ty = \begin{cases} C + \dfrac{(-1)^{n-k-1}}{(k-1)!(n-k-1)!(t^K + 1)} & \\ \quad \times \displaystyle\int_{t_0}^{t} (t-s)^{k-1} \mathrm{d}s \int_s^{\infty} (u-s)^{n-k-1} p(u) & \\ \quad \times f((1 + g^k(u))y(g(u)) + R(g(u)))\mathrm{d}u & t \geqslant t_* \\ C & t_0 \leqslant t \leqslant t_* \end{cases}$$

往证 T 是 K 到其自身的全连续算子.

1) $TK \subset K$

对任意 $y \in k$,因为

$$\begin{aligned} 0 & \leqslant \frac{1}{(k-1)!(n-k-1)!(t^K+1)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{k-1} \mathrm{d}s \\ & \quad \times \int_s^{\infty} (u-s)^{n-k-1} p(u) f((1 + g^k(u))y(g(u)) \\ & \quad + R(g(u)))\mathrm{d}u \\ & \leqslant \frac{L_2}{(k-1)!(n-k-1)!(t^k+1)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{k-1} \mathrm{d}s \\ & \quad \times \int_s^{\infty} (u-s)^{n-k-1} p(u) [(1 + g^k(u))^{\alpha} y^{\alpha}(g(u)) \\ & \quad + |R(g(u)))|^{\alpha}] \mathrm{d}u \\ & \leqslant \frac{L_2(M_1(2a)^{\alpha} + M_1 M_0^{\alpha}}{(k-1)!(n-k-1)!(t^k+1)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{k-1} \mathrm{d}s \\ & \leqslant \frac{M_1 L_2((2a)^{\alpha} + M^{\alpha})}{k!(n-k-1)!} \leqslant a \end{aligned}$$

所以,$a \leqslant Ty \leqslant 2a$,即 $Ty \in K$.

2) T 是 K 上的全连续映射.

对任意 $y_1, y_2 \in K$,由 H_2,可得

$$\begin{aligned} & |Ty_1(t) - Ty_2(t)| \\ & \leqslant \frac{1}{k!(n-k-1)!} \times \int_{t_0}^{t} u^{n-k-1} p(u) \\ & \quad |f((1 + g^k(u))y_1(g(u)) + R(g(u))) \\ & \quad - f((1 + g^k(u))y_2(g(u)) + R(g(u))| \mathrm{d}u \\ & \leqslant \frac{L_2}{k!(n-k-1)!} \int_{t_0}^{\infty} u^{n-k-1} p(u) \\ & \quad \times (1 + g^k(u))^{\alpha} |y_1(g(u)) - y_2(g(u))|^2 \mathrm{d}u \\ & \leqslant \frac{L_2 M_1}{k!(n-k-1)!} ||y_1 - y_2||^{\alpha} \end{aligned}$$

从而

$||Ty_1 - Ty_2|| \leqslant \dfrac{L_2 M_1}{k!(n-k-1)!} ||y_1 - y_2||^{\alpha}$. 这说明 T 在 K 上一致有界且等度连续. 由 Ascoli-Arzele 定理,即可知 $T(K)$ 是相对紧致的,从而 T 为 K 上的全

连续算子.

若 $K=0$,则令

$$Ty(t)=\begin{cases} c+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\ \times p(s)f(y(g(s)))\mathrm{d}s & t\geqslant t_* \\ d & t_0\leqslant t\geqslant t_* \end{cases}$$

其中 d 为常数,使 $Ty(t)$ 在 t_* 处连续. 与 $k\geqslant 1$ 情形类似,可以证明 T 是 K 到其自身内的全连续算子.

由 Schauder 不动点定理,存在 $y_0\in K$,使 $Ty_0=y_0$,定义 $x_0(t)=(t^k+1)y_0(t)\quad t\geqslant t_0$,则可验证 $x_0\in A_k$.

证毕

推论 1 设 $A_l\neq\Phi,(0\leqslant l\leqslant n-1)$,则 $A_k\neq\Phi$, $k=l+1,\cdots,n-1$.

引理 4 若 $x\in A_k\cup B_k$, $y(t)=x(t)-R(t)$,则

$$\int_{t_0}^{\infty}t^{n-k-1}y^{(n)}(t)\mathrm{d}t$$
$$=-t_0^{n-k-1}y^{(n-1)}(t_0)+\sum_{i=2}^{n-k-1}(-1)^i\{n-k-1\}$$
$$\times(n-k-2)\cdots(n-k-i+1)t_0^{n-k-i}y^{n-i}(t_0)$$
$$+(-1)^{n-k+1}\times\lim_{t\to\infty}(y^{(k)}(t)-y^{(k)}(t_0))\qquad(10)$$

证 先证在引理条件下,

$$\lim_{t\to\infty}t^iy^{(k+i)}(t)=0,\ i=1,2,\cdots,n-k-1\quad(11)$$

因为 $y^l(t)\quad(l=k+1,\cdots,n-1)$ 最终单调趋于零,所以由中值定理

$$y^{(k+j-1)}(t)-y^{(k+j-1)}(\frac{t}{2})$$
$$=\frac{t}{2}y^{(k+j)}(\zeta_j)\quad j=1,2,\cdots,n-k$$

可得

$$|t^jy^{(k+j)}(t)|$$
$$\leqslant 2t^{j-1}\frac{t}{2}|y^{(k+j)}(\zeta_j)|$$
$$=2t^{j-1}|y^{(k+j-1)}(t)-y^{(k+j-1)}(\frac{t}{2})|$$
$$=|2t^{j-1}y^{(k+j-1)}(t)-2^j((\frac{t}{2})^{j-1}y^{(k+j-1)}(\frac{t}{2}))|$$
$$j=1,2,\cdots,n-k-1\qquad(12)$$

取 $j=1$,得 $\lim\limits_{t\to\infty}ty^{(k+1)}(t)=0$,若 $k+2\leqslant n$,

取 $j=2$,又由(12)得 $\lim\limits_{t\to\infty}t^2y^{(k+2)}(t)=0$. 由归纳法,(11)式成立. 用分部积分法及结论(11),即可知(10)成立.

证毕

引理 5 设 $1\leqslant k\leqslant n-1$,若 $B_k\neq\Phi$,则 $A_k\neq\Phi$.

证 设 $x\in B_k$,令 $x(t)=y(t)+R(t)$,则 $y^{(k)}(t)\to 0$ 且 $y^{k-1}(t)\to\infty\quad(t\to\infty)$. 由 $x^{(k)}(t)\quad(k=0,1,\cdots,n-1)$ 的单调性及 Кдаурдзе 引理[5],存在 $t_1\geqslant t_0$,使 $t\geqslant t_1$ 时,$y^{(i)}(t)\geqslant 0\quad(i=1,2,\cdots,k)$, $(-1)^ly^{(k+l)}(t)>0\quad(l=1,2,\cdots,n-k)$. 从而 $(-1)^{n-k-1}>0$.

将方程(2)乘以 t^{n-k-1},当 $t\geqslant t_1$ 时从 t 到 ∞ 积分,由引理 4 得

$$y^{(k)}(t)-t^{(n-k-1)}y^{(n-1)}(t)$$
$$+\sum_{i=2}^{(n-k-1)}(-1)^i(n-k-1)\cdots(n-k-i+1)$$
$$\times t^{n-k-i}y^{(n-i)}(t)+\int_t^{\infty}u^{n-k-1}p(u)f(y(g(u))$$
$$+R(g(u)))\mathrm{d}u=0$$

因此有

$$y^{(k)}(t)$$
$$\geqslant\frac{1}{(n-k-1)!}\int_t^{\infty}u^{n-k-1}p(u)f(y(g(u))$$
$$+R(g(u)))\mathrm{d}u=0\qquad(13)$$

对(13)从 t_1 到 t 积分 k 次,得

$$y(t)\geqslant y(t_1)+y'(t_1)(t-t_1)+\cdots+\frac{y^{(k-1)}(t_1)}{(k-1)!}$$
$$\times(t-t_1)^{k-1}+\frac{1}{(k-1)!(n-k-1)!}$$
$$\times\int_{t_1}^{t}(t-s)^{k-1}\mathrm{d}s$$
$$\times\int_s^{\infty}u^{(n-k-1)}p(u)f(y(g(u))+R(g(u)))\mathrm{d}u$$
$$\geqslant\frac{1}{(k-1)!(n-k-1)!}\int_{t_1}^{t}(t-s)^{k-1}\mathrm{d}s$$
$$\times\int_s^{\infty}u^{n-k-1}p(u)f(y(g(u))+R(g(u)))\mathrm{d}u$$
$$\geqslant\frac{(t-t_1)^k)}{k!(n-k-1)!}F(t)$$

其中

$$F(t)=\int_t^{\infty}u^{n-k-1}p(u)f(y(g(u))+R(g(u)))\mathrm{d}u$$

$(t\geqslant t_1)$ 满足 $\lim\limits_{t\to\infty}F(t)=0$. 由于 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=\infty$,故存在 $t_2\geqslant t_1$ 使 $t\geqslant t_2$ 时.

$$F'(t)=-t^{n-k-1}p(t)f(y(g(t))+R(g(t)))<0,$$

且不等式 $(t-t_1)^k\geqslant\frac{t^k}{2}$ 同时成立. 因此,$t\geqslant t_2$ 时

$$y(t)\geqslant\beta t^kF(t),\beta=\frac{1}{2k!(n-k-1)!}.$$

由 H_2,存在 $t_3\geqslant t_2$,当 $t\geqslant t_3$ 时

$$f(y(g(t))+R(g(t)))\geqslant\frac{L_1}{2}(y(g(t))+R(g(t)))^{\alpha},$$

且有 $y(g(t))+R(g(t))\geqslant\frac{1}{2}y(g(t))$.

从而 $t\geqslant t_3$ 时,

$$f(y(g(t))+R(g(t)))\geqslant\frac{L_1}{2^{1+\alpha}}\beta^{\alpha}g^{k\alpha}(t)F^{\alpha}(t).$$

由 $\int_{t_3}^{\infty} t^{(n-k-1)} g^{k\alpha}(t) g(t) \mathrm{d}t$

$$\leqslant \frac{2^{1+\alpha}}{L_1\beta^\alpha} \int_{t_3}^{\infty} t^{n-k-1} p(t) f(y(g(t)) + R(g(t)) F^{-\alpha}(t) \mathrm{d}t$$

$$= -\frac{2^{1+\alpha}}{L_1\beta^\alpha} \int_{t_3}^{\infty} F^{-\alpha}(t) \mathrm{d}F(t)$$

$$= \frac{2^{1+\alpha}}{L_1\beta^\alpha(1-\alpha)} F^{1-\alpha}(t_3) < \infty$$

与定理 1 知，$A_k \neq \Phi$.

定理 2 当 n 为偶数时，(1) 存在正解的充要条件是

$$\int^{\infty} t^{n-k-1} p(t) g^{k\alpha}(t) \mathrm{d}t < \infty.$$

证：当 n 为偶数时，$B_0 = \Phi$. 事实上，若有 $x_0 \in B_0$，则 $y_0(t) = x_0(t) - R(t)$ 为 (2) 的正解且 $\lim\limits_{t\to\infty} y_0(t) = 0$. 但 $y_0^{(n)}(t) < 0$ 对充分大的 t 成立. 由 Кдаурдзе 引理，$y'(t) > 0$，从而 $y(t)$ 单调递增. 这与 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ 矛盾.

因此，$P = A \cup (\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} B_k)$. 由引理 5，$P \neq \Phi$ 的充要条件是 $A \neq \Phi$，由定理 1 即可知结论成立.

当 $r(t) \equiv 0$, $g(t) = t - \tau(t)$, $\tau(t) \in C(R, R_+)$ 且有界时，本文结论均成立. 因而无强迫项与有界滞量的情形是本文的特例.

参考文献

1 Suano T, Naito M. Positive solutions of a class of nonlinear ordinary differential equation. Nonlinear analysis, 1988, 12 (9).

2 Kusano T, Singh B. Positive solutions of functional differential equations with singlar nonlinear terms. Nonlinear analysis, 1984, 8 (9).

3 Madfoud W E. Oscillation and asymptotic behavior of nth order nonlinear delay differential equations. J Diff Equs, 1977, (24).

4 燕居让. n 阶非线性时滞微分方程的振动性与渐近性. 数学学报，1990，33 (4).

5 李森林，温立志. 泛函微分方程. 长沙：湖南科技出版社，1989，406～416.

（责任编辑：蒋汉明）

（上接第13页 Continue from page 13）

6 邵学思. 神经科学的近代发展及其对因果观念的挑战. 自然杂志，1993，(6)：14～19.

7 汪云九. 认知科学的某些计算理论. 科学，1993，44 (4)：9～14.

8 冯嘉礼，王维智. 记忆结构与性质集结构. 桂林：广西师范大学学报，1994，(3)：1～7.

9 冯嘉礼. 思维与智能科学中的性质论方法. 北京：原子能出版社，1990.

10 冯嘉礼等. 以属性为基础的知识库建库原则. 计算机研究与发展，1987，24 (11)：55～61.

11 江泽涵. 拓扑学引论. 北京：科学出版社，1979.

12 陈意云. 计算机科学中的范畴论. 合肥：中国科技大学出版社，1993，79～81.

13 汪培庄. 模糊集合论及其应用. 上海：上海科技出版社，1983，14～16.

14 冯嘉礼. 感知与思维的性质坐标分析法. 见：戴汝为，史忠植主编. 人工智能和智能计算机. 北京：电子工业出版社，1991，113～118.

15 冯嘉礼. 基于性质坐标系的一种非单调推理与决策. 大自然探索，1990，9 (4)：87～93.

16 冯嘉礼. 一种会学习的感知决策机模型. 桂林：广西师范大学学报，1992，(1)：1～6.

（责任编辑：蒋汉明　梁积全）