

二次样条元

The Square Spline Element

杨绿峰
Yang Lufeng

(广西大学土木系 南宁市西乡塘路10号 530004)

(Dept. of Civil Engineering, Guangxi University, 10 Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 利用二次 B 样条函数构造样条元的位移场函数, 建立了弹性直梁样条元和薄板的半解析样条元, 并计算了等截面、变截面梁和板。结果表明, 二次样条元具有未知量少、精度高、占用计算机内存少等优点。

关键词 样条元 变分原理 有限样条元法

Abstract The square B-spline function was used as the function of displacement field. The spline element of elastic straight beam and semi-analytical spline element of thin slab were derived. Several examples about constant or variable thickness beams and slabs were computed. The results show that the square spline elements have higher accuracy, less unknowns and occupation of memory space than the common elements or strip elements.

Key words spline element, square spline function, finite spline element method

B 样条函数(简记为 BSF)有偶次、奇次之分, 就现有文献而言, 奇次 BSF 在工程实践中应用较多。事实上, 偶次 BSF 特别是二次 BSF 同样有其独特的力学意义, 它们理应在结构分析中得到重视和应用。

与三次样条元相比, 二次样条元由于冥次降低, 因而在计算模式的精确推导中更加简单。

样条元是利用 BSF 构造单元场函数的单元。它不同于普通单元。有限单元法中, 结点通常分布在单元边界上或单元内部, 场未知参数通常是场变量在这些结点上的值。而有限样条元法中, 场未知参数仅是有限个结点上的广义参数, 通常没有明确的物理意义。一定数目的结点参数与 BSF 一起描述样条元的特征, 这些结点部分位于样条元边界上, 其余的则位于样条元之外(一般分布在与此样条元相邻的其它样条元上)。这样就大大增加了样条元之间的共用结点及结点参数。因而, 在同样的分割下, 有限样条元法与有限单元法(或半解析的有限条法)相比, 前者可大大降低总的离散未知量, 同时提高解的连续性。

普通样条函数方法需要建立整个区域的场函数, 从而忽略了结点间不同单元的差异, 限制了样条函数方法的应用范围, 在变厚度梁、板等结构中, 难以显示 BSF 的紧凑性和光滑性。

1 弹性直梁样条元

1.1 样条元分析

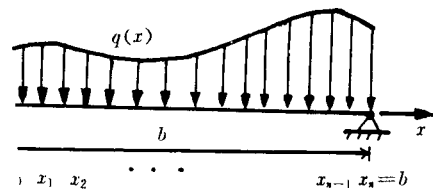


图1-1 弹性直梁 Fig. 1-1 Elastic straight beam

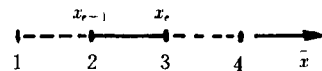


图1-2 样条元 e Fig. 1-2 Spline element

图 1-1 所示一均质弹性薄梁, 在 x 方向上将梁均分为 $n(n \geq 1)$ 等份:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$x_i = x_0 + ih, \quad h = \frac{b}{n}$$

任意二相邻结点 x_{r-1}, x_r 可构成一个样条元 e (图 1-2 所示)。结点 1、4 位于样条元之外, 结点 2、3 位于样条元 e 的边界上, 依照由小到大的顺序, 它们依次相当于梁上结点 $x_{r-2}, x_{r-1}, x_r, x_{r+1}$ 。

利用二次 BSF 构造样条元 e 的位移场函数:

$$w = (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4) \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = N\delta \quad (1)$$

式中,

$$N = (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4) \quad (2)$$

$$\delta = (\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4)^T \quad (3)$$

其中, δ_i 表示结点 i ($i = 1, 2, 3, 4$) 上的广义参数; φ_i 表示 $\varphi_i(\bar{x})$, 是二次 BSF, 且有表达式:

$$\varphi_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}(\bar{x} - \frac{1}{2})^2 & \bar{x} \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \bar{x} \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases};$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} \frac{3}{4} - \bar{x}^2 & \bar{x} \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - \bar{x})^2 & \bar{x} \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\varphi_3 = \begin{cases} \frac{1}{2}(\bar{x} + \frac{1}{2})^2 & \bar{x} \in [0, \frac{1}{2}] \\ -\bar{x}^2 + 2\bar{x} - \frac{1}{4} & \bar{x} \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\varphi_4 = \begin{cases} 0 & \bar{x} \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2}(\bar{x} - \frac{1}{2})^2 & \bar{x} \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

这里, $\bar{x} = \frac{x - x_{e-1}}{h}$.

样条元 e 的总势能泛函为:

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \int_0^1 (\chi^T M - 2q^T w^T) h d\bar{x} \quad (5)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} \chi &= -\frac{d^2 w}{dx^2} = -N' \delta \\ M &= D^T \chi = -D^T N' \delta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

N' 表示 N 对 x 求导二次, q 表示样条元 e 上的分布荷载, D^T 表示样条元的抗弯刚度。

根据变分原理, 可得刚度方程:

$$G^e \delta^e = P^e \quad (7)$$

式中,

$$G^e = \int_0^1 D^T N'^T N' h d\bar{x}, P^e = \int_0^1 q^T N^T h d\bar{x} \quad (8)$$

由于样条元尺寸较小, 如果 D^T 、 q^T 沿轴线方向在样条元上不发生急剧变化, 通常可假定二者为常数。这样就易于写出式 (8) 的显式:

$$G^e = \frac{D^T}{h^3} \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ & 2.5 & -2 & 0.5 \\ \text{对} & & 2.5 & -1 \\ & & & 0.5 \end{bmatrix}; P^e = \frac{q^T h}{48} \begin{Bmatrix} 1 \\ 23 \\ 23 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

1.2 整体分析

梁的总势能等于所有样条元总势能的叠加:

$$\pi = \sum \pi^e \quad (10)$$

因而, 梁的总体刚度方程为:

$$G\delta = P \quad (11)$$

式中,

$$G = \sum G^e; P = \sum P^e \quad (12)$$

$$\delta = (\delta_{-1} \ \delta_0 \ \delta_1 \ \dots \ \delta_{n+1}) \quad (13)$$

根据 δ^e 在 δ 中的位置, 易于将 G^e 、 P^e 集成 G 、 P 。

1.3 处理边界条件

二次 BSF 不具有基特性, 因而结点广义位移参数 δ_i ($i = -1, 0, 1, \dots, n, n+1$) 没有明确的物理意义。为了便于引入边界条件, 本文建立了新的样条矩阵 Q :

$$Q = \text{diag}(Q_0, I, Q_n) \quad (14)$$

式中, I 为 $n-3$ 阶单位矩阵;

$$Q_0 = \begin{bmatrix} -h & 0 & t \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}t \\ h & 0 & t \end{bmatrix}; Q_n = \begin{bmatrix} t & 0 & -h \\ -\frac{1}{3}t & \frac{4}{3} & 0 \\ t & 0 & h \end{bmatrix}; \quad (15)$$

其中, $t = 0$ 或 1 , 当 $x = x_0$ (或 x_n) 端简支时, Q_0 (或 Q_n) 中 $t = 0$; 在其它支承条件下 $t = 1$ 。

利用 Q 对 δ 重新定义, 可建立端部附近的结点参数 δ_i ($i = -1, 0, 1$ 和 $n-1, n, n+1$) 与边界支承条件之间的联系, 如下列式子所述:

(1) 当 $x = x_0$ (或 x_n) 端固定时, 有:

$$\delta_1 = \delta_{-1} = -2\delta_0, \text{ 或 } \delta_{n-1} = \delta_{n+1} = -2\delta_n \quad (16)$$

(2) 当 $x = x_0$ (或 x_n) 端简支时, 有:

$$\delta_{-1} = -\delta_1, \delta_0 = 0; \text{ 或 } \delta_{n-1} = -\delta_{n+1}, \delta_n = 0 \quad (17)$$

(3) 当 $x = x_0$ (或 x_n) 端简单固定时, 有:

$$\delta_1 = \delta_{-1}, \delta_0 \neq 0; \text{ 或 } \delta_{n-1} = \delta_{n+1}, \delta_n \neq 0 \quad (18)$$

(4) 当 $x = x_0$ (或 x_n) 端自由时, 有:

$$\delta_i \neq 0, i = -1, 0, 1; \text{ 或 } i = n-1, n, n+1 \quad (19)$$

根据式 (16) ~ (19), 可方便地处理各类支承条件。

另外, 也可以利用样条矩阵 Q 将刚度方程式 (11)

改写为如下形式:

$$Kc = F \quad (20)$$

式中,

$$K = Q^T G Q; F = Q^T P \quad (21)$$

$$c = (c_{-1} \ c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n+1}) = Q\delta \quad (22)$$

其中, 样条矩阵 Q 如式 (14)、(15) 所示, 且 $t = 1$ 。 G 、 P 同式 (12); c_i ($i = -1, 0, 1, \dots, n+1$) 仍表示结点参数, 且有:

$$\begin{aligned} c_{-1} &= w'(x_0), c_0 = w(x_0); \\ c_n &= w(x_n), c_{n+1} = w'(x_n). \end{aligned} \quad (23)$$

这样就能直接将边界位移条件引入式(20)中。

2 弹性薄板的半解析样条元

图2-1所示一矩形薄板。沿 x 轴方向将薄板均匀分割成几个条状单元,称之为半解析样条元。任意二个相邻结线 $x = x_{r-1}, x = x_r$ 可构成一个样条元 e (如图2-2所示)。结线1和结线4处于样条元之外,结线2、3位于样条元边界上,它们依次与薄板上的结线 $x_{r-2}, x_{r-1}, x_r, x_{r+1}$ 相应。

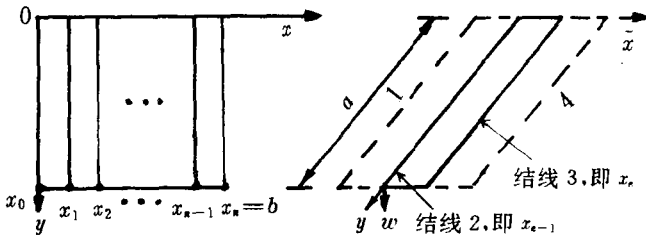


图2-1 弹性薄板

图2-2 样条元 e

Fig. 2-1 Elastic thin slab Fig. 2-2 Spline element

样条元的位移场函数构造如下:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m=1}^r (\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4) \begin{Bmatrix} \delta_{1,m}^* \\ \delta_{2,m}^* \\ \delta_{3,m}^* \\ \delta_{4,m}^* \end{Bmatrix} Z_m(y) \\ &= \sum_{m=1}^r N_m \delta_m^* \\ &= N \delta^* \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{式中, } N = (N_1 \ N_2 \ \dots \ N_r) \quad (25)$$

$$N_m = (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4) Z_m(y) \quad (26)$$

$$\delta^* = \begin{Bmatrix} \delta_{1,m}^* \\ \delta_{2,m}^* \\ \vdots \\ \delta_{4,m}^* \end{Bmatrix} \quad \delta_m^* = \begin{Bmatrix} \delta_{1,m}^* \\ \delta_{2,m}^* \\ \delta_{3,m}^* \\ \delta_{4,m}^* \end{Bmatrix} \quad (27)$$

$\delta_{i,m}^*$ 是结线 i ($i = 1, 2, 3, 4$) 的第 m 项广义参数; $Z_m(y)$ 可根据样条元在 y 方向两对边支承条件取相应的梁振型函数^(1,2), φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 如式(4)所示。

样条元的曲率、弯矩分别为:

$$\begin{aligned} \chi &= \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^T \\ &= \sum_{m=1}^r B_m \delta_m^* = B \delta^* \end{aligned} \quad (28)$$

$$M = (M_x \ M_y \ M_{xy})^T = DB \delta^* = S \delta^* \quad (29)$$

式中,

$$B = (B_1 \ B_2 \ \dots \ B_r), S = (S_1 \ S_2 \ \dots \ S_r) \quad (30)$$

$$B_m = \left[-\frac{\partial^2 N_m^T}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 N_m^T}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 N_m^T}{\partial x \partial y} \right]^T, S_m = DB_m \quad (31)$$

对应于正交各向异性板和各向同性板,弹性矩阵 D 分别为:

$$D = \begin{Bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{Bmatrix}; \text{或 } D = D_0 \begin{Bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

其中, $D_0 = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$, E, μ 是材料常数, t 表示样条元厚度。

薄板小挠度弯曲时,样条元 e 的总势能泛函为:

$$\pi^e = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^h (\chi^T M - 2q^T w^T) h d\bar{x} dy \quad (33)$$

将式(28)、(29)代入式(33)中,整理得:

$$\pi^e = \frac{1}{2} \delta^{eT} G^e \delta^e - \delta^{eT} P^e \quad (34)$$

式中,

$$\begin{aligned} G^e &= \int_0^b \int_0^h B^T DB h d\bar{x} dy; \\ P^e &= \int_0^b \int_0^h N^T q^T h d\bar{x} dy \end{aligned} \quad (34)$$

根据能量变分原理可得样条元刚度方程:

$$G^e \delta^e = P^e \quad (35)$$

将式(25)、(30)代入式(35),展开得:

$$G^e = \begin{Bmatrix} G_{11}^e & G_{12}^e & \dots & G_{1r}^e \\ G_{21}^e & G_{22}^e & \dots & G_{2r}^e \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{r1}^e & G_{r2}^e & \dots & G_{rr}^e \end{Bmatrix}; \quad P^e = \begin{Bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \\ \vdots \\ P_r^e \end{Bmatrix} \quad (36)$$

其中,

$$G_{ij}^e = \int_0^b \int_0^h B_i^T DB_j h d\bar{x} dy; \quad P_i^e = \int_0^b \int_0^h N_i^T q^T h d\bar{x} dy \quad (34)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, r \quad (37)$$

薄板的总势能等于各样条元的总势能泛函之和;

$$\pi = \sum \pi^e \quad (38)$$

因而,薄板的总体刚度方程为:

$$G \delta = P \quad (39)$$

式中,

$$G = \sum G^e; \quad P = \sum P^e \quad (40)$$

$$\delta = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_r \end{Bmatrix}; \quad \delta_m = \begin{Bmatrix} \delta_{-1,m} \\ \delta_{0,m} \\ \delta_{1,m} \\ \vdots \\ \delta_{n+1,m} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

根据 δ 与 δ 的位置关系,易于集成总体刚度矩阵和荷载列阵 G, P 。

边界条件的处理已在 1.3 中叙述。

3 算例与分析

3.1 图 1-1 所示弹性匀质直梁,在不同的支承条件、截面和外荷载下,计算挠度和弯矩。

表1 梁的挠度和弯矩

Table 1 Deflection and bending moment of beam

n	梁中点受集中荷载 p Central concentrated load, p			受均布荷载 q 作用 Uniformly distributed load, q			
	$W_{中}$	$M_{中}$	$M_{端}$	$W_{中}$	$M_{中}$	$M_{端}$	
FSEM	20	0.00514	0.119	0.119	0.00256	0.0415	0.0752
	30	0.00518	0.121	0.121	0.00260	0.0417	0.0832
精确解 Exact		0.00521	0.125	0.125	0.00260	0.0417	0.0833
乘子 Multiplier		Pb^3/D	Pb	Pb	qb^4/D	qb^2	qb^2

FSEM = 有限样条元法 Finite spline element method; n = 单元数 Number of elements. $W_{中}$ —— W_{centre} ; $M_{中}$ —— M_{centre} ; $M_{端}$ —— M_{end}

表2 静水压力下梁的挠度和弯矩

Table 2 Deflection and bending moment of beam under hydrostatic load

n	两端简支 Two ends simply-supported		两端固定 Two ends clamped				
	$W_{中}$	$M_{中}$	$W_{中}$	$M_{中}$	$M_{左端}$	$M_{右端}$	
FSEM	20	0.00650	0.06245	0.00128	0.02073	0.03080	0.04441
	30	0.00651	0.06248	0.00129	0.02079	0.03165	0.04622
	40	0.00651	0.06249	0.00130	0.02081	0.03207	0.04914
精确解 Exact		0.00651	0.0625	0.00130	0.02083	0.0333	0.05
乘子 Multiplier		qb^4/D	qb^2	qb^4/D	qb^2	qb^2	qb^2

FSEM = 有限样条元法 Finite spline element method; n = 单元数 Number of elements. $W_{中}$ —— W_{centre} ; $M_{中}$ —— M_{centre} ; $M_{左端}$ —— $M_{left-end}$; $M_{右端}$ —— $M_{right-end}$

表3 Table 3

n	受均布荷载 q Uniformly distributed load, q		跨中受集中荷载 p Central concentrated load, p		
	$W_{中}$	$M_{中}$	$W_{中}$	$M_{中}$	
FSEM	20	0.004184	0.1248	0.006599	0.224
	30	0.004185	0.1248	0.006602	0.246
	32	0.004192	0.1249	0.006612	0.246
精确解 Exact		0.004196	0.125	0.006620	0.25
乘子 Multiplier		qb^4/D_0	qb^2	qb^4/D_0	qb^2

FSEM = 有限样条元法 Finite spline element method; n = 单元数 Number of elements. $W_{中}$ —— W_{centre} ; $M_{中}$ —— M_{centre}

例 1 两端固定,等截面直梁.计算结果见表 1。

例 2 等截面直梁,受静水压力作用,荷载最大集度为 q_0 .计算结果见表 2.计算中,可假定每个样条元上受均布荷载.如此线样分布荷载简化为梯级分布荷载。

例 3 两端简支梁,正截面高度 $h(x)$ 沿轴线方向线性变化,从 $h(0) = h_0$ 增加到 $h(b) = 2h_0$.计算时,可假定每个样条元高度不变.因而全梁的抗弯刚度呈梯级变化.计算结果见表 3.表中, D_0 表示 $x = 0$ 点的抗弯刚度。

3.2 应用二次半解析样条元计算薄板挠度和弯矩

例 4 四边简支各向同性的等厚度正方形薄板,边长为 b .计算结果见表 4。

例 5 图 2-1 所示正方形薄板,边长为 $a = b, x = 0$ 边固定,其余三边简支.承受静水压力 $q(x)$,且 $q(0) = 0, q(b) = q_0$.可假定各样条元高受均布荷载作用.计算结果见表 5。

例 6 四边简支各向同性的变厚度方形薄板,边长为 b ,厚度 $t(x)$ 沿 x 方向线性变化,由 $t(0) = t_0$ 增加到 $t(b) = 2t_0$,受均布荷载 q 作用.计算结果见表 6.计算中,可假定各样条元为等厚度,这样厚度线性变化近似为梯级变化.表 6 中, $D_0 = \frac{Et_0^3}{12(1-\mu^2)}$ 计算结果同有限条法相比较。

3.3 结果分析及小结

从前面的例题可以看出,二次样条元尽管只是二次单元,仍具有较高计算精度.主要原因在于二次 BSF 同高次 BSF 一样,具有良好的力学性能和光滑性.另外,无论是梁样条元还是板样条元,在每个离散结点上仅有一个未知参数(对于半解析板样条元,每个结线上,对应于级数的每一项仅有一个未知参数).因而有限样条元法与普通的有限元法、有限条法相比,前者的未知量少得多.并且离散单元愈多,二者在这个方面的差异就愈明显.对于板壳问题,也可以利用二个方向上 BSF 的乘积构造样条元的位移场函数,从而建立全离散的样条元计算模式。

另一方面,有限样条元法仍以单元、条元分析为基础,这样就使其计算格式与有 Guangxi Sciences, Vol. 1 No. 2, May 1994

表4 薄板的跨中挠度及弯矩

Table 4 Central deflexion and bending moment of thin slab

	$\mu = 0.3$			$n = 10$			$n = 32$			$n = 30$		
	四边简支 Four sides simply-supported			两对边简支, 两对边固定 Two opposite sides simply-supported and the other two sides clamped			三边简支, 一边固定 Three sides simply-supported and one side clamped					
	$W_{\text{中}}$	$M_{x\text{中}}$	$M_{y\text{中}}$	$W_{\text{中}}$	$M_{x\text{中}}$	$M_{y\text{中}}$	$W_{\text{中}}$	$M_{x\text{中}}$	$M_{y\text{中}}$			
$m = 1$	0.004103	0.04933	0.05165	0.001953	0.03462	0.02793	0.002821	0.04048	0.03749			
$m = 3$	-0.00005	-0.00154	-0.00447	-0.000048	-0.00160	-0.00437	-0.000049	-0.00157	-0.00446			
Σ	0.004053	0.0478	0.0472	0.00191	0.03302	0.0236	0.00277	0.0389	0.0330			
精确解 Exact	0.00406	0.0479	0.0479	0.00192	0.0332	0.0244	0.0028	0.039	0.034			
乘子 Multiplier	qb^4/D	qb^2	qb^2	qb^4/D	qb^2	qb^2	qb^4/D	qb^2	qb^2			

n = 单元数 Number of elements. $W_{\text{中}}$ —— W_{centre} ; $M_{x\text{中}}$ —— $M_{x\text{-centre}}$; $M_{y\text{中}}$ —— $M_{y\text{-centre}}$

表5 静水压力下板的跨中挠度和弯矩

Table 5 Deflexion and bending moment of thin slab under hydrostatic load

$n = 20$	$m = 1$	$m = 3$	Σ	精确解 Exact	乘子 Multiplier
$W_{\text{中}}$	0.001517	-0.000025	0.001492	0.0015	qb^4/D
$W_{x\text{中}}$	0.020995	-0.000780	0.020215	0.020	qb^2
$W_{y\text{中}}$	0.019926	-0.002257	0.01767	0.018	qb^2

n = 单元数 Number of elements. $W_{\text{中}}$ —— W_{centre} ; $M_{x\text{中}}$ —— $M_{x\text{-centre}}$; $M_{y\text{中}}$ —— $M_{y\text{-centre}}$

表6 变厚度板的跨中挠度和弯矩

Table 6 Deflexion and bending moment of variable thickness slab under variable distributed loading

$n = 20$	$m = 1$	$m = 3$	Σ	有限条法 Finite strip method	乘子 Multiplier
$W_{\text{中}}$	0.001250	-0.000015	0.001235	0.001237	qb^4/D_0
$W_{x\text{中}}$	0.044458	-0.001376	0.04308	0.04312	qb^2
$W_{y\text{中}}$	0.051222	-0.004602	0.04662	0.05018	qb^2

n = 单元数 Number of elements. $W_{\text{中}}$ —— W_{centre} ; $M_{x\text{中}}$ —— $M_{x\text{-centre}}$; $M_{y\text{中}}$ —— $M_{y\text{-centre}}$

限元法、有限条法的计算格式在某种程度上得到统一。因而有限样条元法可以充分利用现有的有限元法、有限条法计算程序及其它现有成果, 并且对于结构形状、荷载和边界条件的适用性较强。

参考文献

- 1 秦 荣著. 结构力学的样条函数方法. 南宁: 广西人民出版社, 1985年.
- 2 Cheng Y K. Finite strip method in structure analysis. Pergamon Press, 1976.

(责任编辑: 蒋汉明)

(上接第6页 Continue from page 6)

$K_2) = \emptyset$, 从而 $A \cap (K_1 \times K_2)$ 为 $K_1 \times K_2$ 的闭集. 因此 $X_1 \times X'$ 不是 k -空间, 所以 $X_1 \times F$ 也不是 k -空间. 由于 $X_1 \times F$ 是 $X_1 \times N^\omega$ 的闭集, 所以 $X_1 \times N^\omega$ 不是 k -空间, 矛盾. 证毕

众所周知, 具有 σ -局部可数基的空间在完全映射下不是逆保持的. 但我们有下面定理:

定理3 设 $f: X \rightarrow Y$ 为完全映射, Y 有 σ -局部可数基, 则 X 有 σ -局部可数基的充分必要条件是 X 有 σ -局部可数 k -网.

证明 设 $x \in X$, 则 $x \in f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(x))$

为 X 的紧子集. 由于 f 是闭映射, Y 是第一可数的, 容易证明 $f^{-1}(f(x))$ 有可数特征, 从而 X 为 q -空间. 由定理1命题得证. 证毕

参考文献

- 1 Fleissner W G, Reed G M. Paratindelof spaces and spaces with σ -locally countable base. Top. proc. 1977. 2: 89~110.
- 2 Gruenhagen G. Generalized Metric Spaces. Handbook of set-Theoretic Topology. Ed by K. Kunen J. Vaughan. 1984. 425~501.
- 3 Gruenhagen G, Michael. Eand Tanaka. Y. Spaces determined by point-countable covers. 1984. 113: 303~332.

(责任编辑: 蒋汉明)