广西科学 Guangxi Sciences 1 (1)：18～22 1994

塑性力学中的新理论新方法*

New Theory and New Method in Plasticity

秦 荣

Qin Rong

（广西大学 南宁市西乡塘路 530004）

(Guangxi University，Xixiangtang Road，Nanning，Guangxi，530004)

摘要 利用塑性应变理论及变分原理提出了一个分析弹塑性问题的新理论新方法。这种新理论新方法避开了非线性应力应变关系，抛弃了分析弹塑性问题的传统做法，避免了上述传统做法带来的困难，不仅计算简便，而且精度高，为弹塑性分析开拓了一个新途径。

关键词 塑性力学 变分原理 塑性应变理论 QR法

Abstract A new theory and new method in plasticity is presented in terms of the theory of plastic straia and variational principle. This method avoids nonlinear stress－strain relation, abandons traditional method for analysis of the elastic－plastic problems and avoids the difficulty of traditional method. This method is not only a simple and convenient method, but also a method of high precison. It ushers in a new way for elastic－plastic analysis.

Key words plasticity, variational principle, theory of plastic straia, QR－method

弹塑性问题普遍发生在工程建设中。如果在工程设计中考虑塑性，则可以挖掘材料潜力，提高结构承载能力，使工程经济合理和安全可靠。因此，近几年来，塑性力学在工程中的应用已日益广泛。

弹塑性问题是塑性力学的一个主要问题。对于弹塑性分析，目前的传统做法依赖于非线性应力应变本构关系，计算非常复杂。显然需要创立弹塑性分析的新理论新方法，抛弃非线性应力应变本构关系，避免上述传统做法带来的困难。近几年来，国内外有许多学者致力于这方面的研究，而且取得一些成果。本文利用塑性应变理论及变分原理提出了一个分析弹塑性问题的新理论新方法。这种新理论新方法避开了非线性应力应变本构关系，抛弃了分析弹塑性问题的传统做法，避免了传统做法带来的困难，不仅计算简便，而且精度也高，为弹塑性分析开拓了一个新途径。

1 弹塑性理论

1.1 应力应变关系

对于固体问题，如果采用弹塑性模型，则总应变向量为

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \tag{1}$$

式中 ε^e 及 ε^p 分别为固体的弹性应变向量及塑性应变向量。由上述可知，应力与应变有下列关系：

$$\sigma = D\varepsilon^e = D(\varepsilon - \varepsilon^p) \tag{2}$$

式中

$$\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T$$

式中 D 为弹性矩阵。由式(2)可得：

$$\sigma = D\varepsilon - \sigma_0 \tag{3}$$

式中 σ_0 为塑性变形引起的应力，即

$$\sigma_0 = D\varepsilon^p \tag{4}$$

如果采用增量形式，则上述表达式可变为

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon &= d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \\ d\sigma &= Dd\varepsilon^e = D(d\varepsilon - d\varepsilon^p) \\ d\sigma &= Dd\varepsilon - d\sigma_0 \\ d\sigma_0 &= Dd\varepsilon^p \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中 $d\sigma$ 及 $d\varepsilon$ 分别为应力向量及应变向量的增量。

1.2 塑性应变理论

1.2.1 单向受力状态

图1是一个单向拉伸的应力应变曲线，其中A

1993-09-25 收稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

点为材料弹性极限或屈服极限对应的点。如果应力超过弹性极限，则应变为

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^e + \varepsilon_x^p \tag{6}$$

式中 ε_x 为 x 方向单向拉伸的应变。当应力超过弹性极限时,则应力为

$$\sigma_x = \sigma_x^s + H(\varepsilon_x^p) \qquad \sigma_x \geqslant \sigma_s \tag{7}$$

式中 σ_x^s 为 x 方向单向拉伸的弹性极限应力。对上式两边微分可得：

$$\mathrm{d}\,\sigma_x = H'\ \mathrm{d}\,\varepsilon_x^p \tag{8}$$

式中 H' 为 $\sigma_x - \varepsilon_x^p$ 曲线的斜率,称为强化系数,即

$$H' = \mathrm{d}\,\sigma_x/\mathrm{d}\,\varepsilon_x^p = EE_t/(E - E_t) \tag{9}$$

式中 E_t 为 σ_x-ε_x 曲线的斜率,称为切线模量,即

$$E_t = \mathrm{d}\,\sigma_x/\mathrm{d}\,\varepsilon_x \tag{10}$$

由上述可知,$\sigma_x - \varepsilon_x^p$ 曲线的斜率可由单向拉伸的 $\sigma_x - \varepsilon_x$ 曲线确定 。

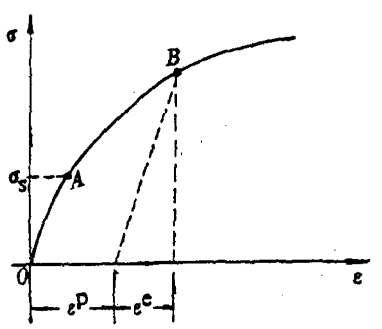

图 1　应力应变关系

Fig. 1　Stress-strain relation

因为 $\mathrm{d}\,\sigma_x = E\,\mathrm{d}\,\varepsilon_x$,因此由式(8) 可得：

$$\mathrm{d}\,\varepsilon_x^p = kE\,\mathrm{d}\,\varepsilon_x^e \tag{11}$$

式中 $k = 1/H' = (E - E_t/EE_t)$　　(12)

如果材料是线性强化的材料,则 H' 及 E_t 为常数。因此由式(11) 可得：

$$\varepsilon_x^p = kE(\varepsilon_x^e - \varepsilon_x^s) \tag{13}$$

式中 ε_x^s 为单向受力状态的弹性极限应变。式 (13) 为塑性应变与弹性应变的相互关系,它表示塑性应变与弹性应变有一定的关系。

1.2.2　空间受力状态

如果固体处于空间受力状态，则

$$\mathrm{d}\,\varepsilon^p = [kB]\,\mathrm{d}\,\varepsilon^e \tag{14}$$

式中 $[kB] = diag(k_xE, k_yE, k_zE, k_{xy}G, k_{yz}G, k_{zx}G)$　　(15)

其中 $k_x, k_y, \cdots, k_{zx}$ 可由式(12) 确定。如果材料采用线性强化模型,则 kB 为常数。因此由式(14) 可得下列关系：

$$\varepsilon^p = [kB](\varepsilon^e - \varepsilon^s) \tag{16}$$

这是塑性应变向量与弹性应变向量的相互关系。式中 ε^s 为弹性极限应力向量。

如果采用 $\mathrm{d}\,\sigma = D\,\mathrm{d}\,\varepsilon^e$,则由 $\mathrm{d}\,\sigma = H'\ \mathrm{d}\,\varepsilon$ 可得：

$$\mathrm{d}\,\varepsilon^p = k^*D\,\mathrm{d}\,\varepsilon^e \tag{17}$$

式中 $k^* = diag(k_x, k_y, k_z, k_{xy}, k_{yz}, k_{zx})$　　(18)

如果材料采用线性强化模型,则式(17) 可变为下列关系

$$\varepsilon^p = k^*D(\varepsilon^e - \varepsilon^s) \tag{19}$$

式中 D 为弹性矩阵。由式(1) 及式(16) 可得：

$$\varepsilon^e = [1 + kB]^{-1}(\varepsilon + [kB]\varepsilon^s) \tag{20}$$

$$\varepsilon^p = [1 + kB]^{-1}[kB](\varepsilon - \varepsilon^s) \tag{21}$$

$$式中\,[1 + kB]^{-1} = diag\left(\frac{1}{1 + k_xE}, \frac{1}{1 + k_yE}, \cdots, \frac{1}{1 + k_{zx}G}\right) \tag{22}$$

由式(1) 及式(19) 可得：

$$\varepsilon^e = (\mathrm{I} + k^*D)^{-1}(\varepsilon + k^*D\varepsilon^s) \tag{23}$$

$$\varepsilon^p = (\mathrm{I} + k^*D)^{-1}k^*D(\varepsilon - \varepsilon^s) \tag{24}$$

式中 I 为单位矩阵。

式 (20) 及式 (23) 代表弹性应变向量与总应变向量的关系，式 (21) 及式 (24) 代表塑性应变向量与总应变向量的关系。

2　变分原理

结构的弹塑性问题可以利用变分原理求解。由最小势能原理可知：

$$\delta\Pi = 0 \tag{25}$$

式中 Π 为结构的总势能泛函，它可以写成下列形式：

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega [(\varepsilon - \varepsilon^p)^T\sigma - 2U^Tq]\,\mathrm{d}\,\Omega - \int_\Gamma U^Tp\,\mathrm{d}\Gamma \tag{26}$$

式中

$$U = [u \quad v \quad w]^T$$

$$q = [q_x \quad q_y \quad q_z]^T$$

$$p = [p_x \quad p_y \quad p_z]^T$$

其中 u, v, w 为位移分量；$q_x \quad q_y \quad q_z$ 为体力分量；$p_x \quad p_y \quad p_z$ 为面力分量。将式(3) 代入式(26) 可得：

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega [(\varepsilon^TD\varepsilon - 2\varepsilon^T\sigma_0 - 2U^Tq]\,\mathrm{d}\,\Omega - \int_\Gamma U^Tp\,\mathrm{d}\,\Gamma + \Pi_0 \tag{27}$$

式中 Π_0 为塑性变形引起的势能泛涵，即

$$\Pi_0 = \frac{1}{2}\int_\Omega (\varepsilon^p)^TD\varepsilon^p\,\mathrm{d}\,\Omega \tag{28}$$

由上述变分原理可以建立下列定理：

定理 1 如果将塑性变形引起的应变及应力作为初应变及初应力，则 $\delta\Pi=0$ 中的总势能泛函可采用下列形式：

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\varepsilon^TD\varepsilon-2\varepsilon^T\sigma_0-2U^Tq\,\mathrm{d}\,\Omega)-\int_{\Gamma}U^Tp\,\mathrm{d}\,\Gamma \tag{29}$$

而且 ε^p 可用式(21) 或式(24) 确定。

定理 2 如果将定理 1 写成增量形式，则 $\delta\Pi=0$ 中的总势能泛函可采用下列形式：

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\mathrm{d}\,\varepsilon^TD\,\mathrm{d}\,\varepsilon-2\mathrm{d}\,\varepsilon^T\mathrm{d}\,\sigma_0-2\,\mathrm{d}\,U^T\mathrm{d}\,q)\,\mathrm{d}\,\Omega-\int_{\Gamma}\mathrm{d}\,U^T\,\mathrm{d}\,p\,\mathrm{d}\,\Gamma \tag{30}$$

而且 $\mathrm{d}\,\varepsilon^p$ 可由下列关系确定：

$$\mathrm{d}\,\varepsilon^p=[1+kB]^{-1}[kB]\,\mathrm{d}\,\varepsilon \tag{31}$$

或 $$\mathrm{d}\,\varepsilon^p=[I+k^*B]^{-1}k^*D\,\mathrm{d}\,\varepsilon \tag{32}$$

定理 3 如果将塑性变形引起的应变及应力作为总应变的函数，则 $\delta\Pi=0$ 中的总势能泛函可变为

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\varepsilon^TD^*\varepsilon-2\varepsilon^TD_0\varepsilon^e-2U^Tq)\,\mathrm{d}\,\Omega-\int_{\Gamma}U^Tp\,\mathrm{d}\Gamma \tag{33}$$

式中 $$D^*=(([1+kB]^{-1})^T([1+kB]^{-1}) \tag{34}$$

$$D_0=(([1+kB]^{-1})^TD([1+kB]^{-1}[kB]) \tag{35}$$

或

$$\left.\begin{aligned}D^*&=[((I+k^*D)^{-1}]^TD[I+k^*D]^{-1})\\D^0&=[((I+k^*D)^{-1}]^TD[((I+k^*D)^{-1}k^*D]\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

利用上述变分原理很容易建立结构弹塑性问题的刚度方程。当刚度方程建立后，利用相应的算法即可求出结构的弹塑性解。

3 弹塑性分析方法

目前，结构弹塑性分析的方法主要采用有限元法，但这种方法用来分析结构弹塑性问题不是一个经济有效的方法。本文提出一个分析结构弹塑性问题的新方法。

3.1 计算原理

图 2 所示的薄壳是一个扁壳，壳面承受分布荷载 q，图中 q_x、q_y 及 q_z 分别为 q 在 x、y 及 z 方向的分量。本文以图 2 为例来阐述结构弹塑性分析的新方法。由定理 1 可知，扁壳的总势能泛函可写成下列形式：

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}(\varepsilon^TD\varepsilon-2\varepsilon^T\sigma_0)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z-\int_0^a\int_0^bU^Tq\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \tag{37}$$

式中 $\varepsilon=[\varepsilon_x\quad\varepsilon_y\quad\gamma_{xy}]^T\qquad[\sigma_x\quad\sigma_y\quad\tau_{xy}]^T$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}-k_1w-z\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\\\varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}-k_2w-z\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\\\gamma_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2k_{12}w-z\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

$$\sigma_0=D\varepsilon^p=D[\varepsilon_x^p\quad\varepsilon_y^p\quad\gamma_{xy}^p]^T \tag{39}$$

式中 k_1、k_2 及 k_{12} 分别为扁壳中曲面的曲率及扭率，t 为壳体厚度。由式 (37) 可得：

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b(\varepsilon_1^T[R]\varepsilon_1-x^T[D]x-2t\varepsilon_1^T\sigma_0-2U^Tq)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \tag{40}$$

式中 $$\varepsilon_1=\left[\frac{\partial u}{\partial x}-k_1w\quad\frac{\partial v}{\partial y}-k_2w\quad\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2k_{12}w\right]^T \tag{41}$$

$$x=-\left[\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\quad\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\quad2\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}\right]^T \tag{42}$$

$$[R]=tD\qquad[D]=t^3D/12 \tag{43}$$

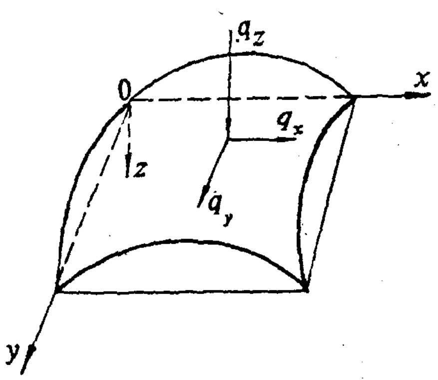

图 2 双曲扁壳

Fig. 2 Shallow shell

如果对扁壳在区间 $[0,a]$ 上作均匀分划(图 3)：

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N=a$$

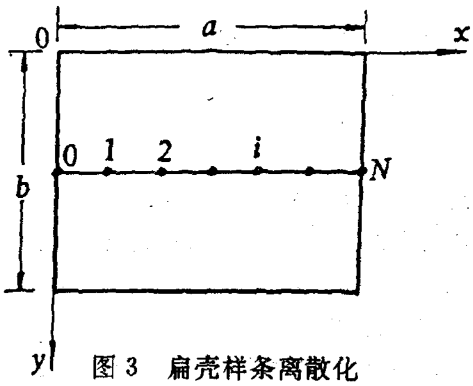

图 3 扁壳样条离散化

Fig. 3 Spline partition of shallow shell

$$x_i=x_0+ih\qquad h=x_{i+1}-x_i=a/N$$

则扁壳的位移函数为

$$u=\sum_{m=1}^{r}[\Phi]X_m\{a\}_m$$

$$v = \sum_{m=1}^{r} [\Phi] Y_m \{b\}_m$$

$$w = \sum_{m=1}^{r} [\Phi] Z_m \{c\}_m \quad (44)$$

式中$[\Phi] = [\Phi_{-1} \quad \Phi_0 \quad \Phi_1 \cdots \Phi_{N+1}]$

$\{A\}_m = [V_0 \quad V_0' \quad A_1 \cdots A_{N-1} \quad V_N' \quad V_N]^T$

其中 $A = a, b, c \qquad V = u, v, w$

$\Phi_i(x)$ 为三次 B 样条函数构成的基函数，它们都是 x 的函数，具体形式见文献〔4〕第 4 章；X_m, Y_m 及 Z_m 为正交函数，它们都是 y 的函数，由式(44) 可得：

$$U = [N]\{\delta\} \quad (45)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \{\delta\} &= [\{\delta\}_1^T \quad \{\delta\}_2^T \cdots \{\delta\}_r^T]^T \\ \{\delta\}_m &= [\{a\}_m^T \quad \{b\}_m^T \quad \{C\}_m^T]^T \\ [N] &= [[N]_1 \quad [N]_2 \cdots [N]_r] \\ [N]_m &= diag([\Phi]X_m, [\Phi]Y_m, [\Phi]Z_m) \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

将式(45) 代入式(41) 及式(42) 可得：

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sum_{m=1}^{r} [A]_m \{\delta\}_m = [A]\{\delta\} \\ \chi &= \sum_{m=1}^{r} [B]_m \{\delta\}_m = [B]\{\delta\} \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

式中$[A]_m$ 及$[B]_m$ 的具体形式见文献〔4〕的式(2.96) 及式(2.97)。

将式(45) 及式(47) 代入式(40) 可得

$$\Pi = \frac{1}{2}\{\delta\}^T[G]\{\delta\} - \{\delta\}^T(\{f\} + \{f'\}) \quad (48)$$

式中 $[G]$ 及$\{f\}$ 分别为扁壳的刚度矩阵及荷载向量，即

$$[G] = \int_0^a \int_0^b ([A]^T[R][A] - [B]^T[D][B]) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \quad (49)$$

$$\{f\} = \int_0^a \int_0^b [N]^T q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \quad (50)$$

$\{f'\}$ 为塑性变形引起扁壳的附加荷载向量，即

$$\{f'\} = t \int_0^a \int_0^b [B]^T \sigma_0 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \quad (51)$$

式中 σ_0 为塑性变形引起的应力，本文将它视为初应力。

利用变分原理可得扁壳的刚度方程：

$$[G]\{\delta\} = \{f\} + \{f'\} \quad (52)$$

扁壳任一点的应力向量为

$$\sigma = [C]\{\delta\} - \sigma_0 \quad (53)$$

$$\sigma_0 = [D_2]([A] + z[B])\{\delta\} - \varepsilon^s] \quad (54)$$

式中

$$[C] = D([A] + z[B]) \quad (55)$$

$$\left.\begin{aligned} [D_2] &= D[1 + kB]^{-1}[kB] \\ \text{或} \quad [D_2] &= D(I + k^* D)^{-1} k^* B \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

上述各式为样条函数方法的计算格式，利用这些计算格式可求扁壳的弹塑性问题。这种问题的求解可采用迭代法、增量迭代法及直接算法。

3.2 迭代法

在迭代过程中，上述样条函数方法的计算格式可以写成下列形式：

$$\{\delta\}^j = [G]^{-1}(\{f\} + \{f'\}^{j-1})$$

$$\{f'\}^{j-1} = t \int_0^a \int_0^b [B]^T (\sigma_0)^{j-1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \quad (58)$$

$$(\sigma_0)^{j-1} = [D_2][([A] + z[B])\{\delta\}^{j-1} - \varepsilon^s] \quad (59)$$

式中上标 j 表示迭代次数，$\{f'\}^0 = \{0\}$。迭代法的计算步骤如下：

(1) 假设 $\sigma_0 = 0$，则$\{f'\}^0 = \{0\}$，利用式(57) 求出$\{\delta\}^1$ 值。

(2) 计算塑性应力向量。如果 ε^s 已知，则利用式(59) 可求出任一点的塑性应力向量$(\sigma_0)^1$ 值。

(3) 利用式(58) 求$\{f'\}^1$ 值。

(4) 利用式(57) 求$\{\delta\}^2$ 值。

(5) 利用式(59) 求$(\sigma_0)^2$ 值。

(6) 利用式(58) 求$\{f'\}^2$ 值。

(7) 利用式(57) 求$\{\delta\}^3$

(8) 经过反复迭代计算，利用式(59) 求$(\sigma_0)^{j-1}$ 值及利用式(58) 求$\{f'\}^{j-1}$ 值。

(9) 利用式(57) 求$\{\delta\}^j$值。如果$\{\delta\}^j$ 与$\{\delta\}^{j-1}$ 相差很小，在允许的范围内，则可停止迭代计算，这时$\{\delta\}^j$ 可以作为$\{\delta\}$ 值。否则还要继续迭代运算，直到收敛为止。当$\{\delta\}$ 确定后，即可求出弹塑性问题的全部解。

3.3 增量迭代法

在增量迭代过程中，上述样条函数方法的计算格式可写成下列增量形式：

$$\Delta\{\delta\}_n^j = [G]^{-1}(\Delta\{f\}_n + \Delta\{f'\}_n^{j-1}) \quad (60)$$

$$\Delta\{f'\}_n^{j-1} = t \int_0^a \int_0^b [B]^T (\sigma_0)_n^{j-1} q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \quad (61)$$

$$\Delta\{\sigma_0\}_n^{j-1} = [D_2][([A] + z[B])\Delta\{\delta\}_n^{j-1}) \quad (62)$$

式中下标 n 表示荷载增量的次数，上标 j 表示每增加一级荷载增量后的迭代次数。如果已求出 $\Delta\{\delta\}_n^{j-1}$ 值，则可按下列步骤进行计算：

(1) 利用式(62) 求任一点的塑性应力向量的增量 $\Delta(\sigma_0)_n^{j-1}$ 值。

(2) 利用式(61) 求 $\Delta\{f'\}_n^{j-1}$ 值。

(3) 利用式(60) 求$\Delta\{\delta\}_n^{j-1}$值。上标 j 从 1 开始，重复步骤(1) 至(3) 的运算直到收敛为止。如果$(\sigma_0)_n^j$ 与$\sigma_0)_n^{j-1}$ 之值相差很小，则认为迭代运算收敛，即可停止迭代运算，算出第 n 级荷载增量产生的结果：

$$\{\delta\}_n = \{\delta\}_{n-1} + \Delta\{\delta\}_n, \sigma_n = \sigma_{n-1} + \Delta\sigma_n$$

$$(\sigma_0)n = (\sigma_0)_{n-1} + \Delta(\sigma_0)_n \quad (63)$$

(4) 如果第 n 级荷载增量刚好把全部荷载加完，则式 (63) 即为所求的弹塑性解。如果荷载还没有加完，再加一级荷载增量，重复步骤 (1) 至 (3) 的运算，直到全部荷载加完为止，即可获得所求弹塑性问题的解。

3.4 直接算法

由式 (33) 可得：

$$\Pi=\frac{1}{2}\{\delta\}^T[K]\{\delta\}-\{\delta\}^T\{F\} \tag{64}$$

式中

$$[K]=\int_0^a\int_0^b([A]^T[R^*][A]+[B]^T[D^*][B])\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{65}$$

$$\{F\}=\{f\}+t\int_0^a\int_0^b[A]^TD_0\varepsilon^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{66}$$

$$[R^*]=tD^*,\qquad [D^*]=t^3D^*/12 \tag{67}$$

利用变分原理可得：

$$[K]\{\delta\}=\{F\} \tag{68}$$

如果 $k_x=k_y=k_{xy}=0$，则上式可变为

$$[G]\{\delta\}=\{f\} \tag{69}$$

式 (68) 为扁壳弹塑性状态的刚度方程，式 (69) 为扁壳弹性状态的刚度方程。由上述可知，式 (68) 对求解弹性问题及弹塑性问题都适用。由上述可知，如果 ε^p 已知，则利用式 (68) 即可求出扁壳弹塑性状态的位移向量。当 $\{\delta\}$ 确定后，利用相应的公式即可求出扁壳的弹塑性应力。这种算法可归结为下列几个步骤：

(1) 利用式 (69) 求解扁壳弹性状态的位移向量 $\{\delta^*\}$。

(2) 确定扁壳弹性状态任一点的应力向量：

$$\sigma=[C]\{\delta^*\} \tag{70}$$

(3) 确定弹性极限应变向量：

$$\varepsilon^e=D^{-1}[H]\sigma_s \tag{71}$$

式中 ε^e 为弹性极限应变向量，σ_s 为单向受力状态的弹性极限应力，$[H]$ 由下列表达式确定：

$$[H]=[H_1\quad H_2\quad \frac{1}{2}H_4]^T \tag{72}$$

式中

$$H_i=\alpha_i/H\qquad i=1,2,4 \tag{73}$$

$$H^2=\alpha_1^2-\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2+3\alpha_4^2 \tag{74}$$

$$\alpha_1=\sigma_x/\sigma_x,\alpha_2=\sigma_y/\sigma_x,\alpha_4=\tau_{xy}/\sigma_x \tag{75}$$

(4) 利用式(65) 及式(66) 确定 $[K]$ 及 $\{F\}$。

(5) 利用式(68) 求解扁壳弹塑性状态的位移向量 $\{\delta\}$。

(6) 确定 $\varepsilon=D([A]+z[B])\{\delta\}$ (76)

(7) 利用式 (20) 及式 (21) 确定弹性应变及塑性应变。

(8) 确定应力分量。壳体任一点的应力向量为

$$\sigma=D\varepsilon^e\qquad \sigma_0=D\varepsilon^p \tag{77}$$

上述算法称为直接算法。

4 结语

(1) 本文建立了弹性应变与总应变的新关系及塑性应变与总应变的新关系。这些新关系称为塑性应变理论。利用这个理论可以建立弹塑性分析的新理论新方法。

(2) 本文对变分原理建立了三个新定理，提出了一些新的变分原理。

(3) 本文提出了分析结构弹塑性的新理论新方法。这种新理论新方法避开了非线性应力应变关系，抛弃了分析弹塑性问题的传统做法，避免了传统做法带来的困难，不仅计算简便，而且精度高，为结构弹塑性分析开拓了一个新途径。

参考文献

1 秦荣．弹塑性问题的 QR 法．见：全国第三届加权残数法会议论文集．峨嵋山：西南交通大学出版社，1989.

2 秦荣．板壳弹塑性问题的样条有限点法．力学学报，1989，增刊．

3 秦荣．弹塑性问题的样条子域法．见：工程力学论文集．南宁：广西科技出版社，1992.

4 秦荣．结构力学的样条函数方法．南宁：广西人民出版社，1985.