广西科学 Guangxi Sciences 1 (1): 10～12 1994

关于耗散算子不动点的唯一性及其点态遍历性——兼评 Chidume 的文章*

On Uniqueness of Fixed Points and Pointwise Ergodicict for Dissipative Operators: A Note on a Paper by Chidume

陶志光
Tao Zhiguang

(广西大学 南宁市西乡塘路，530004)
(Guangxi University, Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 我们证明了 C. E. Chidume 在文献〔1〕(Bull. Austral. Math. Soc. *1990, 42: 21～31*) 中给出的主要定理是错误的，并作了完善与修正.

关键词 耗散算子 算子的遍历性 一致凸空间

Abstract *We show that the main theorem obtained by* C. E. Chidume in reference 〔1〕 (Bull. Austral. Math. Soc. 1990, 42: 21～31) is not valid, and make some improvements and complements.

Key words dissipative operators, ergodicity of operators, uniformly convex spaces

1 引言

对线性与非线性算子的遍历性研究，由于它具有深刻的物理背景，几十年来一直是受到数学家广泛关注的课题，至今不衰. 本文主要讨论耗散算子的不动点的唯一性及其遍历性，证明了 C. E. Chidume 的一条主要定理是错误的，并给出了修正与补充.

设 E 是实 Banach 空间，K 是 E 中的闭凸子集，又设 T 是 K 到 K 中的算子. 如果对 K 中任何两个元素 x 与 y，以及对任何正数 λ，都有

$$\|x-y\| \leqslant \|(x-y)+\lambda(T_x-T_y)\| \quad ①$$

称 T 是增生算子. 条件 ① 等价于对 K 中任意的 x 与 y，在 $J(x-y)$ 中存在一个 g，使得

$$<T_x-T_y,g> \geqslant 0, \quad ②$$

其中 $J(x)=\{f\in E^*: <x,f>=\|x\|^2=\|f\|^2\}$(文献〔2〕, p. 509). 如果 $(-T)$ 是增生的，称 T 是耗散算子. 当 T 是定义在 E 上的耗散算子，并且存在某个正数 λ 使得 $(I-\lambda T)$ 是满射时，称 T 是 m－耗散的. 对一个 K 到 K 中的算子 S 和一列正数 $\{\lambda_n\}$，$0<\lambda_n\leqslant 1, n=0,1,2,\cdots$，从 K 中一个点 x_0 出发，令

$$x_{n+1}=(1-\lambda_n)x_n+\lambda_n Sx_n, \forall n\geqslant 0 \quad ③$$

若从 K 的任一点 x_0 出发，$\{x_n\}$(由 ③ 给出) 的 c－平均 (即 Cesaro 平均) 序列，即 $\{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}x_j\}$，强收敛 (几乎处处收敛，当 $E=L_p(\mu), 1\leqslant p\leqslant\infty$)，则称 S 是关于 $\{\lambda_n\}$ 广义强 (点态) 遍历的. 当每个 λ_n 均为 1 时，广义遍历性就化为常义的了.

文献〔1〕中的主要定理如下:

定理(*). 设 E 是一个实 Banach 空间，它的共轭空间 E^* 是一致凸的，K 是 E 中的一个非空的有界闭凸子集. 又设 $T: K\to K$ 是连续的单调映照. 定义一个 K 到 K 中的映照如下: $S_x=f-T_x, x\in K$. 设 $\{\lambda_n\}$ 是一列实数，满足

(i) $0<\lambda_n<1, \forall n\geqslant 0$,

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n=\infty$

1993-09-25 收稿。
* 国家自然科学基金项目。

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n b(\lambda_n)<\infty$

从一点 $x_0\in K$ 出发，令

$$x_{n+1}=(1-\lambda_n)x_n+\lambda_n Sx_n,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

则对任意给定的 $f\in K$，序列 $\{x_n\}$ 强收敛于方程 $x+Tx=f$ 在 K 中的一个解.

注：上面的函数 $b(t)$ 的定义见于文献〔1〕，它在下文还将多次出现.

我们首先证明，除非 T 是零算子，定理（$*$）不可能成立．反证：假定定理（$*$）成立．按定理的假设条件，S 是 K 到 K 中的映照，从而对任一个 $x\in K$，应有 $f-T_x\in K$．因为 K 是凸集．所以 $\frac{1}{2}f=\frac{1}{2}(f-Tx)+\frac{1}{2}Tx$ 也属于 K．用归纳法立即得到 $\frac{1}{2^n}f\in K,n=1,2,\cdots$，因此 $0\in K$．现在进一步假定 $T\neq 0$，从而应有某个 $x_0\in K$ 使得 $Tx_0\neq 0$．用类似上面的方法可以推出 $0-Tx_0\in K$．令 $f=-Tx_0$（取定）．由定理的假设条件又应有 $Sx_0\in K$，即 $2f=f-Tx_0\in S$，从而 K 包含 $nf,n=1,2,\cdots$，这与 K 的有界性矛盾.

2 主要结果以及对定理（$*$）的修正

定理 1 设 E 是一个实 Banach 空间，它的共轭空间 E^* 是一致凸的，T 是 E 到 E 中的连续增生算子．定义算子 $s:E\to E$ 如下：$Sx=f-Tx,x\in E$．又设 $\{\lambda_n\}$ 是一列实数，满足定理（$*$）中的条件（i）、（ii）与（iii）．对 $x_0\in E$，令

$$x_{n+1}=(1-\lambda_n)x_n+\lambda_n Sx_n,n=0,1,2,\cdots$$

则

（1）对任一个给定的 $f\in E$．方程 $x+Tx=f$ 有唯一解，记为 q，换言之，耗散算子 S 有唯一的不动点.

（2）若 $\{x_n\}$ 有界，它必强收敛于 q.

（3）如果 E^* 的凸性模 $\delta_{E^*}(\varepsilon)$ 满足条件：$\delta_{E^*}(\varepsilon)\geqslant M\varepsilon^r$，其中 $M>0,r\geqslant 2$ 为常数，又如果对 $s=r(r-1)^{-1}$，(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^s<\infty$，(b) 存在一个常数 $a\in(0,1)$ 和一个正整数 N 使得

$$\lambda_{n-1}^{s-1}\leqslant(1+a\lambda_n)\lambda_n^{s-1},\forall n\geqslant N, \quad ④$$

(c) $\{x_n\}$ 有界，则收敛速度有下述估计

$$\|x_n-q\|\leqslant M\lambda_{n-1}^{\frac{s-1}{2}},\forall n\geqslant 0 \quad ⑤$$

（4）当 $E=L_p(\mu),1<p<\infty$ 时，若 $\{\lambda_n\}$ 满足上述的 (a)、(b) 与 (c)，其中 s 在 $p\leqslant 2$ 时等于 2，在 $p>2$ 时等于 p，则 $\{x_n\}$ 的 $c-$ 平均序列也几乎处处收敛于 q.

注记

（1）如果 (a) 得到满足，则定理中的条件（iii）自动成立（参阅文献〔1〕）.

（2）如果 $\lambda_n=(n+1)^{-\delta}$，其中 $S^{-1}<\delta<1$，或者 $\lambda_n=\frac{s}{n+1}$，容易验证，此时 $\{\lambda_n\}$ 必满足 (a) 与 (b).

定理 2 设 E、E^*、$\{\lambda_n\}$ 如同定理 1 中所规定．又设 $S:E\to E$ 是非扩张的耗散算子．则

（1）S 有唯一的不动点，记为 q.

（2）从 E 的任一点 x_0 出发，由③定义的序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 q，因此，S 关于 $\{\lambda_n\}$ 是广义强遍历的.

（3）如果 E^* 的凸性模具有性质：$\delta_{E^*}(\varepsilon)\geqslant\beta\varepsilon^r$，其中 $\beta>0,r\geqslant 2$ 为常数，又如果 $\{\lambda_n\}$ 对 $s=r(r-1)^{-1}$ 满足定理 1 中的条件 (a) 与 (b)，则有收敛速度的下述估计式

$$\|x_n-q\|\leqslant M\lambda_{n-1}^{s-1},\forall n\geqslant 0$$

（4）当 $E=L_p(\mu),1<p<\infty$ 时，若 $\{\lambda_n\}$ 满足上述的 (a)、(b) 与 (c)，其中 s 在 $p\leqslant 2$ 时等于 2，在 $p>2$ 时等于 p，则 $\{x_n\}$ 的 $c-$ 平均序列也几乎处处收敛于 q，换言之，S 关于 $\{\lambda_n\}$ 具有广义点态遍历性.

3 主要结果的证明

定理 1 的证明

（1）由于 $I+T$ 是 E 上的连续强增生算子，方程 $x+T_x=f$ 必有解[3]．至于解的唯一性，在证明了（2）以后即可得到.

（2）令 q 表示方程 $x+T_x=f$ 的一个解，显然 q 也是算子 S 的一个不动点，设 $\{x_n\}$ 有界，这时用类似于文献〔1〕中的论证方法可推出

$$\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant(1-\lambda_n)\|x_n-q\|^2+M\lambda_n b(\lambda_n),\forall n\geqslant 0 \quad ⑥$$

其中 $M>0$ 是常数，因此，

$$\lambda_n\|x_n+q\|^2\leqslant\|x_n+q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2+M\lambda_n b(\lambda_n),\forall n\geqslant 0 \quad ⑦$$

注意上式左端是非负的，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\|x_n-q\|^2\leqslant\lim_n\sum_{k=1}^{n}[\|x_k-q\|^2-\|x_{k+1}-q\|^2+M\lambda_k b(\lambda_k)]=\lim_n\|x_1-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2+M\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n b(\lambda_n)\leqslant\|x_1-q\|^2+M\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n b(\lambda_n)<\infty \quad ⑧$$

从⑧的右端看出 $\lim_n\|x_n-q\|^2=b$ 存在且有限；再从⑧式左端的级数收敛以及 $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n=+\infty$ 即可推出

$\lim \| x_n - q \| = 0$ ⑨

现在我们来证明方程 $x + T_x = f$ 只有唯一解. 设 q' 是方程的又一解,从而也是 S 的又一个不动点. 从 $x_0 = q'$ 出发,按程序 ③ 给出的每个 x_n 必然都等于 q',从而 $\{x_n\}$ 有界. 由(9) 式有 $q' = q$.

(3) 设条件 (a)、(b)、(c) 都得到满足,因为 $\delta_{E^*}(\varepsilon) \geqslant M\varepsilon^r$,根据命题 3(文献〔4〕, p. 337),存在常数 $c > 0$ 以及正整数 N,使得 $b(\lambda_n) \leqslant c\lambda_n^{s-1}, \forall n \geqslant N$. 当然我们还可以要求当 $n \geqslant N$ 时,④ 式成立. 于是利用 ⑥ 式推出

$$\| x_{n+1} - q \|^2 \leqslant (1 - \lambda_n) \| x_n - q \|^2 + Mc\lambda_n^s, \quad \forall n \geqslant N \qquad ⑩$$

取 $M' = \{\frac{2MC}{1-a}, \lambda_0^{1-s}) \| x_1 + q \|^2, \lambda_1^{1-s}) \| x_2 + q \|^2, \cdots, \lambda_{N-1}^{1-s}) \| x_N + q \|^2\}$. 往证

$$\| x_n - q \|^2 \leqslant M' \lambda_{n-1}^{s-1} s, \forall n \geqslant 1 \qquad ⑪$$

事实上,由 M' 的定义立即可知 ⑪ 对 $1 \leqslant n \leqslant N$ 成立. 设 ⑪ 式对 $n \leqslant k (k > N)$ 为真,那么,利用 ⑩ 与 ④,我们得到

$$\| x_{k+1} - q \|^2 \leqslant (1 - \lambda_k) M' \lambda_{k-1}^{s-1} + MC\lambda_k^s \leqslant M' \lambda_k^{s-1} [(1 - \lambda_k) \lambda_{k-1}^{s-1} \lambda_k^{1-s} + \frac{1-a}{2} \lambda_k] \leqslant M' \lambda_k^{s-1} [(1 - \lambda_k)(1 + a\lambda_k) + \frac{1-a}{2} \lambda_k] \leqslant M' \lambda_k^{s-1}$$

由归纳法假设,⑪ 对一切 $n \geqslant 1$ 成立.

④ 现在设 $E = Lp(\mu), 1 < p < \infty$,则 $\delta_{E^*}(\varepsilon) \geqslant \beta\varepsilon^r$,其中 $r = s(s-1)^{-1}$(引理,文献〔1〕, p. 27). 又设 (a)、(b)、(c) 成立,所以有收敛速度估式 ⑤,利用 ⑤ 以及下述命题即知 $\{x_n\}$ 的 c — 平均序列几乎处处收敛于 q.

命题 设 $f, f_n \in L_p(\mu), 1 < p < \infty, n = 1, 2, \cdots$. 如果存在一个常数 $r \in [1, \infty)$,使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| f - f_n \|^r < \infty$$

则 $\{f_n\}$ 的 c — 平均序列几乎处处收敛于 f.

证 此命题不难直接证明,也可以从文献〔5〕中的引理中简单推出,故略去.

定理 2 的证明 根据定理 1,我们只须证明,对于这种情形,从任一点 $x_0 \in E$ 出发,按照 ③ 给出的序列 $\{x_n\}$ 必是有界的. 事实上,由于 S 是非扩张的,对 S 的不动点 q,我们有

$$\| x_{n+1} - q \| = \| (1 - \lambda_n) \| (x_n - q) + \lambda_n (Sx_n - q) \| = \| (1 - \lambda_n)(x_n - q) + \lambda_n (Sx_n - Sq) \| \leqslant \| x_n - q \|, n = 0, 1, 2, \cdots$$

可见 $\{x_n\}$ 有界. 证毕.

参考文献

1 Chidume C E. Iterative solution of nonlinear equations of the monotone type in Banach spaces. Bull Austral Math Soc, 1990, 42: 21~31.

2 Kato T. Nonlinear semigroups and evolution equations. J Math Soc Japan 1967, 19: 508~520.

3 Matin R H. A global existence theorem for autonomous differential equations in Banach spaces, Proc Amer Soc, 1970, 26: 307~314.

4 Reich S. Constructive techniques for accretive and monotone operators. Applied Nonlinear Analysis, 1979: 335~345.

5 Tao Z G. On pointwise ergodicity of nonlinear operators in Lp—spaces. (to apear).

(上接第 9 页 Continue from page 9)

参考文献

1 Bhattacharya p. Mukherjee N P. A family of maximal subgroups containing the Sylow subgroups and some solvability conditions. Arch Math (Basel) 1985, 45 (5): 390~397.

2 Gorenstein D. Finite simple groups. New York and London: Plenum press, 1982, P. 13.

3 Huppert B. Endliche Gruppen I Berlin- Heidelberg- New York, 1967.

4 Kurzweil H. Endliche Groppen. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

5 Li Shirong. Finite groups with a system of nilpotent subgroups. Southeast Asian Bull. Math 1993, 17 (1).

6 Conway J H. Curtis R T. Norton S P. Wilson R A. Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press. 1985.