广西科学 Guangxi Sciences 1 (1)：4～6 1994

可缩多面体是绝对收缩核

Every Contractible Polyhedron Is an Absolute Retract

麦结华

Mai Jiehua

（广西大学数学研究所 南宁市西乡塘路 530004）

(Institute of Mathematics, Guangxi University, Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 在文献〔1〕(Proc Amer. Math. Soc. 1983, 88：333～337) 中我们证明了每一个可折叠多面体均可内射度量化。借助于这一结果，本文证明了每一个可缩多面体均是个绝对收缩核。

关键词 多面体 可缩空间 绝对收缩核 锥形 可折叠复形 内射度量空间.

Abstract In reference 〔1〕(Proc Amer. Math. Soc. 1983, 88：333～337) we proved that *every collapsible polyhedron is injectively metrizable. Using this result we prove in this paper* that every contractible polyhedron is an absolute retract.

Key words polyhedron, contractible space, absolute retract, cone, collapsible complex, injective metric space

1 收缩核、可缩空间及内射度量空间

映射的扩充问题是拓扑学上的核心问题之一. 拓扑学上的收缩核、绝对收缩核及内射度量空间等概念均与映射的扩充有关.

在本文中,我们所考虑的拓扑空间之间的映射均限于连续映射. 设 $Z_+ = \{1, 2, \cdots\}$ 为正整数集，R 为实数轴，$I = [0,1]$ 为 R 中的单位区间，I^n 为 R^n 中的单位方体. 通常我们认为 $R^n = R^n \times \{0\} \subset R^{n+1}$，$I^n = I^n \times \{0\} \subset I^{n+1}$，(任 $n \in Z_+$). 定义 R^n 或其子空间上的度量 d_M 为 $d_M((s_1, \cdots s_n), (t_1, \cdots t_n)) = \max\{|s_i - t_i| : i \in Z_n\}$ ($Z_n = \{1, \cdots, n\}$). 又令 $R^0 = I^0 = \{0\} \subset R$. 下列两个定义可参看文献〔2〕及〔3〕：

定义 1 设 X 是个拓扑空间，$A \subset X$. 若恒等映射 $1_A: A \to A$ 可扩充为映射 $f: X \to A$，则称 A 为 X 的一个**收缩核**. 若恒等映射 $1_X: X \to X$ 零伦(即同伦于 X 上的常值映射)，则称 X 是**可缩的**.

定义 2 设 Y 是正规空间. 若对任一个正规空间 X 及 X 的任一个闭子空间 A，从 A 到 Y 的任一个映射 f: $A \to Y$ 均可扩充为从 X 到 Y 的一个映射 $F: X \to Y$，则称 Y 是个**绝对收缩核**.

下列三个命题是人们熟知的[2,3]：

命题 1 n 维方体 I^n 是个绝对收缩核($n \geq 1$).

命题 2 设 $\{Y_\beta: \beta \in \mathbf{B}\}$ 是个正规空间的族. 则积空间 $\Pi\{Y_\beta: \beta \in \mathbf{B}\}$ 是绝对收缩核的充要条件是每一个 Y_β 均是个绝对收缩核.

命题 3 若 Y 是个绝对收缩核，$A \subset Y$ 是 Y 的一个收缩核，则 A 也是个绝对收缩核.

内射度量空间的定义与绝对收缩核相似，但仅限于不增加距离的映射.

定义 3[4] 设 Y 是个度量空间. 若对任一度量空间 X 及任 $A \subset X$，从 A 到 Y 的任一个不增加距离的映射 $f: A \to Y$ 均可扩充为从 X 到 Y 的一个不增加距离的映射 $F: X \to Y$，则称 Y 是个**内射度量空间**.

有关内射度量空间的一些性质，可参看文献〔4，5〕. 本文将借助于可折叠多面体的内射度量化[1]，证明每一个可缩的多面体均同胚于某一方体的一个收缩核，从而得到如下的

主要定理 设 X 是有限单纯复形 S 的多面体，则当且仅当 X 可缩时 X 是绝对收缩核.

1993-09-25 收稿。

2 可折叠复形及其多面体

若无特别声明，本文所考虑的复形均为有限复形．如下两个关于可折叠的单纯或方体复形的定义见文献〔4〕及〔1〕：

定义4 设 S 是个单纯复形．若存在 S 的递增的子复形的序列 $S_0, S_1, \cdots, S_n$ 使得 S_0 恰含一个顶点，$S_n = S$，且 $S_i - S_{i-1} = \{\triangle i, \tau_i\}$，其中 $\triangle_i$ 是 S 中的一个 r_i-维单纯形，τ_i 是 $\triangle i$ 的一个 $r_i - 1$ 维面，$i = 1, \cdots, n$，则称 S 是个（n 次）可折叠单纯复形．

定义5 设 K 是个方体复形．若存在 K 的递增的子复形的序列 $K_0, K_1, \cdots, K_n$ 使得 $K_0 = I^0 = \{0\}$，$K_n = K$，并且存在 K_i 的非空子复形 Li 使得 $K_{i+1} = K_i \cup (L_i \times I)$，$i = 0, 1, \cdots, n-1$，则称 K 是个（n 次）**可折叠的方体复形**．

若在定义 5 中，$|L_i|$ 总是 K_i 中的广义长方体，则称 K 是个**可正则折叠**的方体复形．关于 $Li \times I$ 及广义长方体的定义，亦见文献〔1〕．

文献〔1〕中还指出，对于每一个方体复形 K，在 K 的多面体 $|K|$ 上存在着由 K 诱导出的度量 d_K，在此不必重述．

以 $K(I^n)$ 表示由 n 维方体 I^n 以及它的所有各个维数的面组成的方体复形．因我们约定 $I^i = I_i \times \{0\} \subset I^{i+1}$，故定义 5 中的 n 次可折叠方体复形 K 必定是 $K(I^n)$ 的一个子复形．

文献〔1〕证明了如下两个命题，根据这两个命题，文献〔1〕证明了任一个可折叠单纯复形 S 的多面体 $|S|$ 均可内射度量化，从而解答了文献〔4〕中提出的一个猜测的充分性部分．

命题4 若 S 是个可折叠单纯复形，则存在着可正则折叠的方体复形 K 使得多面体 $|K|$ 与 $|S|$ 同胚．

命题5 若 K 是个可正则折叠的方体复形，则 $(|K|, d_K)$ 是个内射度量空间．

3 锥形

空间 Y 上的锥形 CY 及单纯复形 S 上的锥形 CS 的定义可参看文献〔6〕($p.77$, $p.141$)．CS 的多面体 $|CS|$ 与 $C|S|$ 同胚，参看文献〔6〕($p.142$)．

引理1 任一个单纯复形 S 上的锥形 CS 均是可折叠的．

证 不妨假定 $|S| \subset R^m$（某 $m \in Z_+$），且 CS 是从 S 到某 $v \in R^{m+1} - R^m$ 的联结体．将 S 中的所有单纯形按照先低维后高维的次序排列，设为 $S = \{\triangle_1, \triangle_2, \cdots, \triangle_n\}$．令 $C\triangle_i$ 为 $\triangle_i$ 与 v 的联结体，（即是由 $\triangle_i$ 及 v 张成的单纯形）．令 $S_i = \{v\} \cup (\cup_{j=1}^{i} \{\triangle_i, C\triangle_i\})$，$(0 \leqslant i \leqslant n)$，则 $S_0, S_1, \cdots, S_n$ 是满足定义 4 中的条件的 CS 的子复形的递增序列．因此，CS 是可折叠的．

将 Y 与锥形 CY 的底面粘合（见文献〔3〕$p.125$，$p.126$），可以认为 $Y \subset CY$．在文献〔3〕的命题 XV．1.3 中取 $X = Y$ 并令 $f: Y \to Y$ 为恒等映射，可得

引理2 当且仅当 Y 是 CY 的收缩核时，Y 是可缩空间．

4 Lipschitz 映射的扩充

设 (X, d) 及 (Y, d') 均是度量空间，$f: X \to Y$ 是映射，λ 是正实数．若对任 $x, y \in X$ 均有 $d'(f(x), f(y)) \leqslant \lambda d(x, y)$，则称 f 是个以 λ 为 Lipschitz 常数的 Lipschitz 映射，简称为 λ—Lipschitz 映射．

引理3 设 Y 是度量空间，则下列两条等价：

(i) Y 是内射度量空间；

(ii) 对任一个度量空间 X，任 $A \subset X$，以及任 $\lambda \in (0, \infty)$，从 A 到 Y 的任一个 λ—Lipschitz 映射 $f: A \to Y$ 均可扩充为一个 λ—Lipschitz 映射 $F: X \to Y$．

证 由定义 3 知性质 (ii) ⇒ (i)．下面证 (i) ⇒ (ii)．对任一个度量空间 (X, d)，任 $A \subset X$，任 $\lambda > 0$，以及任一个 λ—Lipschitz 映射 $f: (A, d) \to Y$，令 X 上的度量 $d_\lambda = \lambda d$，则 $f: (A, d_\lambda) \to Y$ 是个不增距的映射．因 Y 是内射的，故 f 可扩充为不增距的映射 $F: (X, d_\lambda) \to Y$．恢复 X 上原有的度量 d，此 $F: (X, d) \to Y$ 即是一个 λ—Lipschitz 映射．

5 可缩多面体是绝对收缩核

引理4 设 K 是 $K(I^n)$ 的连通的子复形，$(|K|, d_K)$ 的直径是 m，又设 $x, y \in |K|$．

(i) 若 $d_M(x, y) < 1$，则 $d_K(x, y) \leqslant d_M(x, y)$；

(ii) 若 $m \geqslant 2$，则 $d_K(x, y) \leqslant m d_M(x, y)$．

证 (i) 对 $i \in Z_+$，令 I^n 上的自映射 φ_i 及 ψ_i 为

$$\varphi_i(r_1, \cdots, r_n) = (r_1, \cdots, r_{i-1}, 1 - r_i, r_{i+1}, \cdots, r_m),$$

$$\psi_i(r_1, \cdots, r_n) = (r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}, r_1, r_{i+1}, \cdots, r_n),$$

（对任 $(r_1, \cdots, r_n) \in I^n$）．易见 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \psi_1, \cdots, \psi_n$ 以及它们之间的复合映射均是 (I^n, d_M) 上的保持距离的同胚映射．因 $d_M(x, y) < 1$，借助于 (I^n, d_M) 上的保持距离的同胚映射．因 $d_M(x, y) < 1$，借助于 (I^n, d_M) 上的保距同胚变换，不妨假定

$$x = (s_1, \cdots, s_i, t_1, \cdots, t_j, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0),$$

$$y = (a_1, \cdots, a_i, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0, b_1, \cdots, b_k),$$

其中 $\{s_1, \cdots, s_i, t_1, \cdots, t_j, a_1, \cdots, a_i, b_1, \cdots, b_k\} \subset I^0 = (0,$

1)，$i \geqslant 0, j \geqslant 0, k \geqslant 0, i+j+k \leqslant n$. 令

$z=(s_1,\cdots,s_i,0,\cdots,0,0,\cdots,0,0,\cdots,0) \in I^n$,

则 $d_M(x,z) \leqslant d_M(x,y), d_M(x,z) \leqslant d_M(x,y)$，且 z 与 x, z 与 y 分别含于 K 的同一个方体中，由此推出

$$d_K(x,y) \leqslant d_K(x,z)+d_k(y,z)$$
$$=d_M(x,z)+d_M(y,z) \leqslant 2d_M(x,y)$$

(ii) 因 (I^n,d_M) 的直径为 1，故 $d_M(x,y) \leqslant 1$. 当 $d_M(x,y)<1$ 时，由结论 (i) 可推出 (ii)，当 $d_M(x,y)=1$ 时，我们亦有 $d_K(x,y) \leqslant m = md_M(x,y)$.

引理 5 设 $K \subsetneq K(I^n)$ 是个 n 次可正则折叠的方体复形，$n \geqslant 1$，$(|K|,d_K)$ 的直径是 m. 则存在着从 I^n 到 $|K|$ 的 m —Lipschitz 收缩映射 $F:(I^n,d_M) \to (|K|,d_k)$；

证 显然 $m \in Z_+$. 当 $m=1$ 时，$K=K(I^n), d_K=d_M$. 此时引理 5 自然成立. 当 $m \geqslant 2$ 时，令 f 是 $|K|$ 上的恒等映射. 据引理 4 知 $f:(|K|,d_M) \to (|K|,d_K)$ 是个 m-Lipschitz 映射. 据命题 5，$(|K|,d_K)$ 是个内射度量空间. 于是，据引理 3，f 可扩充为一个 m —Lipschitz 映射 $F:(I^n,d_M) \to (|K|,d_K)$.

现在我们给出前面提出的

主要定理的证明 若 $X=|S|$ 是绝对收缩核，则 X 是 CX 的收缩核，据引理 2 知 X 是可缩的.

反之，若 X 是可缩的，则据引理 2 知 X 是 CX 的收缩核. 在第 3 节中我们已指出 $CX=C|S|$ 与 $|CS|$ 同胚. 据引理 1，CS 是可折叠的. 据命题 4，存在着 n 次可正则折叠的方体复形 $K \subset K(I^n)$（某 $n \in Z_+$）使得 $|CS|$ 与 $|K|$ 同胚. 据引理 5，$|K|$ 是 I^n 的收缩核. 因 I^n 是绝对收缩核，据命题 3 知 $|K|$ 是绝对收缩核. 因 CX 与 $|K|$ 同胚，再次运用命题 3 即可推出 CX 的收缩核 X 也是绝对收缩核.

注 1 容易看出，可折叠多面体一定是可缩多面体，因而一定是绝对收缩核. 但反之不然. 文献〔6〕中定义的“蜷帽”是个可缩的 2 维多面体（见文献〔6〕，p. 127，p. 128），因而是个绝对收缩核，但它显然不是可折叠的. 据文献〔4〕的定理 1. 8，没有一个距离函数可以使它成为内射度量空间.

注 2 若 X 不是多面体，则 X 可缩只是 X 是绝对收缩核的必要条件而不是充分条件，例如，令 R 的子集 $V=\{\frac{1}{n}:n \in Z_+\} \cup \{0\}$，又令 $X=CV$ 为 V 上的锥形，则 X 是可缩的，但 X 不是多面体. 因恒等映射 $1_V:V \to V$ 不能扩充为从 R 到 CV 的映射，故 $X=CV$ 不是绝对收缩核.

参考文献

1 Mai Jiehua, Tang Yun. *An injective metrization for collapsible polyhedra*. *Proc Amer Math Soc*，1983，88：333～337.

2 曼克勒斯 J R. 拓扑学基本教程. 北京：科学出版社，1987.

3 Dugundji J. Topology，Allyn and Bacon. Inc Boston，1966.

4 Isbell J R. Six theorems about injective metric spaces. Comment Math Helv，1964，39：65～76.

5 Mai Jiehua，Tang Yun. Free deformation retraction in injective metric spaces. Chin Ann of Math，1989，10B：221～226.

6 Armstrong M A. 基础拓扑学，北京：北京大学出版社，1983.

启　事

广西科学技术期刊编辑学会和《广西科学》编辑部，拟于 1994 年内收集汇编《广西自然科学科技人员在国内外发表（出版）的学术论文和研究报告目录汇编（1949～1993）》，汇编目录分国内和海外，国内限于“863”和国家重点攻关项目试验报告，国家级学报刊载的论文和国家自然科学基金资助的研究项目成果论文；海外限于各国的专业学报、会刊或国际某学科有第×届别的学术讨论会或年会（请说明大会、小组宣读或墙报或书面）发表的论文；博士论文。作者必须是在广西工作或国家、广西派出的留学生和访问学者，并要求是独著或合著的领衔人或执笔者。《汇编》初定 1995 年第二季编发，以后拟逐年编发前一年度的目录。欢迎广西各期刊编辑部、各科研院所（中心）、各大专院校科研处（室、科）提供资料并协助通知教、科、体、卫各行各专业科、教、技和管理人员多向我们通报信息，裨使《汇编》尽可能少遗漏，谢谢合作！

通报格式如下：

论文题目	作者姓名	发表年月	刊物、学术交流会名称及举办地点

外文请附作者自译的中文。

广西科技期刊编辑学会
《广西科学》编辑部
1993 年 12 月